

# Einführung in die Physik

Alexander Murauer, Helge Krüger  
a0302790@unet.univie.ac.at  
<http://www.unet.univie.ac.at/a0302790/>

29. Juni 2004

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Vorwort</b>	<b>8</b>
<b>2</b>	<b>Einleitung in die Physik</b>	<b>9</b>
2.1	System und Modell . . . . .	9
2.2	Entwicklung des phys. Weltbildes . . . . .	9
2.3	Bedeutung der Physik in anderen Wissensgebieten . . . . .	11
2.4	Der Meßvorgang . . . . .	12
2.4.1	Beschreibung eines Systems mittels phys. Größen . . . . .	12
2.4.2	Welche Basisgrößen wählt man? . . . . .	12
2.4.3	Meßgenauigkeit . . . . .	15
<b>3</b>	<b>Mechanik</b>	<b>18</b>
3.1	Kinematik von Massenpunkten . . . . .	18
3.1.1	Arten von Bewegungen . . . . .	18
3.1.2	Geschwindigkeit . . . . .	18
3.1.3	Beschleunigung . . . . .	19
3.1.4	Spezielle Bewegungen . . . . .	19
3.1.5	Versuch Fallschnüre . . . . .	19
3.1.6	Kreisbewegung . . . . .	20
3.2	Dynamik von Massenpunkten . . . . .	21
3.2.1	Allgemeines . . . . .	21
3.2.2	Newtonsche Axiome . . . . .	21
3.2.3	Erhaltungssätze . . . . .	23
3.2.4	Drehimpuls . . . . .	23
3.2.5	Drehmoment . . . . .	24
3.2.6	Zusammenhang von Drehimpuls und -moment . . . . .	24
3.2.7	Erhaltung des Drehimpulses . . . . .	24
3.2.8	Massenmittelpunkt . . . . .	24
3.2.9	Arbeit und Leistung . . . . .	25
3.2.10	Kinetische Energie . . . . .	27
3.2.11	Konservative Kräfte . . . . .	28
3.2.12	Potentielle Energie . . . . .	28
3.2.13	Zusammenhang zwischen Kraft und Potentieller Energie . . . . .	29
3.2.14	Mechanische Gesamtenergie . . . . .	29
3.3	Kräfte und Kraftfelder . . . . .	30
3.3.1	Arten von Wechselwirkungskräften . . . . .	30
3.3.2	Arten von Kraftfeldern . . . . .	30
3.3.3	Gravitationskraft . . . . .	31
3.3.4	Massenanziehung von Massenpunkten . . . . .	31
3.3.5	Mathematisches Pendel . . . . .	32
3.3.6	Keplersche Gesetze . . . . .	33
3.3.7	Molekulare Wechselwirkungskräfte . . . . .	34

3.3.8	Harmonischer Oszillator . . . . .	34
3.4	Bezugssystem . . . . .	34
3.4.1	Translation . . . . .	35
3.4.2	Rotation . . . . .	35
3.5	Stoss und Streuung . . . . .	36
3.5.1	Massenmittelpunkt- oder Schwerpunktsystem . . . . .	37
3.5.2	Laborsystem . . . . .	37
3.5.3	Grundgleichungen . . . . .	37
3.5.4	Dynamik der Streuung . . . . .	37
3.5.5	Streuung von Teilchenstrahlen . . . . .	38
3.6	Mechanik des starren Körpers . . . . .	38
3.6.1	Statik . . . . .	38
3.6.2	Dynamik . . . . .	39
3.6.3	Rotation um eine feste Achse . . . . .	40
3.6.4	Harmonischer Oszillator der Drehung . . . . .	41
3.6.5	Vergleich Rotation Translation . . . . .	41
3.6.6	Rotation um freie Achsen . . . . .	41
3.6.7	Symmetrischer Kreisel . . . . .	41
3.7	Mechanisch deformierbare Körper . . . . .	42
3.7.1	Fluide (Flüssigkeiten und Gase) . . . . .	42
3.7.2	Oberflächen von Flüssigkeiten . . . . .	42
3.7.3	Kapillarität . . . . .	43
3.7.4	Ruhende Flüssigkeiten - Hydrostatik . . . . .	44
3.7.5	Strömungen in Fluiden . . . . .	45
3.7.6	Reibung in Fluiden . . . . .	49
3.7.7	Spannungen . . . . .	50
3.7.8	Härte von Festkörpern . . . . .	54
3.7.9	Reibung . . . . .	54
<b>4</b>	<b>Schwingungen und Wellen</b> . . . . .	<b>55</b>
4.1	Schwingungen . . . . .	55
4.1.1	Ungedämpfte Schwingungen . . . . .	55
4.1.2	Zeigerdarstellung . . . . .	56
4.1.3	Schwingungsdauer $T$ . . . . .	56
4.1.4	Frequenz . . . . .	56
4.1.5	Überlagerungen von Schwingungen . . . . .	57
4.1.6	Gedämpfte Schwingungen . . . . .	57
4.1.7	Erzwungene Schwingung . . . . .	59
4.1.8	Gekoppelte Oszilatoren . . . . .	59
4.2	Wellen . . . . .	60
4.2.1	Eindimensionale Wellen . . . . .	60
4.2.2	Schwingungsdauer $T$ . . . . .	60
4.2.3	Schwingungen pro Zeiteinheit (Frequenz) . . . . .	60
4.2.4	Wellenlänge . . . . .	60
4.2.5	Wellen pro Längeneinheit . . . . .	61
4.2.6	Ausbreitungsgeschwindigkeit . . . . .	61
4.2.7	Zusammenfassung . . . . .	62
4.2.8	Wellengleichung . . . . .	62
4.3	Doppler Effekt . . . . .	62
4.3.1	Quelle bewegt sich, Beobachter ruht . . . . .	62
4.3.2	Quelle ruht, Beobachter bewegt sich . . . . .	63
4.3.3	Dopplereffekt bei Licht, elektromagnetische Wellen . . . . .	63
4.3.4	Machscher Kegel . . . . .	64

<b>5</b>	<b>Thermodynamik</b>	<b>65</b>
5.1	Einführung . . . . .	65
5.1.1	Temperatur . . . . .	65
5.1.2	Temperaturskalen . . . . .	65
5.1.3	Temperaturmessung . . . . .	66
5.1.4	Technische Temperaturmessung . . . . .	67
5.1.5	Thermische Ausdehnung . . . . .	67
5.1.6	Anomalie des H <sub>2</sub> O . . . . .	69
5.2	Zustandsgleichung idealer Gase . . . . .	70
5.2.1	Gesetz von Boyle (1662) - Mariotte (1676) . . . . .	70
5.2.2	Gesetz von Gay-Lussac (1802) . . . . .	71
5.2.3	Zustandsgleichung idealer Gase . . . . .	71
5.2.4	Mol . . . . .	72
5.2.5	Allgemeines Gasgesetz . . . . .	72
5.2.6	Reale Gase . . . . .	72
5.2.7	Van der Waals-Gleichung . . . . .	73
5.3	Kinetische Gastheorie . . . . .	73
5.3.1	Relation Geschwindigkeit der Moleküle / Temperatur . . . . .	74
5.3.2	Geschwindigkeitsverteilung . . . . .	74
5.3.3	Brownsche Molekularbewegung . . . . .	75
5.3.4	Diffusion . . . . .	75
5.3.5	Osmose . . . . .	75
5.4	1. Hauptsatz . . . . .	76
5.4.1	Innere Energie des Idealen Gases . . . . .	76
5.4.2	Wärmekapazität . . . . .	77
5.4.3	Phasenübergänge und Latente Wärme . . . . .	77
5.4.4	Spezifische Wärme idealer Gase . . . . .	77
5.4.5	Allgemein: Innere Energie pro Freiheitsgrad . . . . .	78
5.4.6	Wärmeübertragung . . . . .	79
5.4.7	Adiabatische Zustandsänderung . . . . .	81
5.5	2. Hauptsatz . . . . .	82
5.5.1	Dampfmaschine . . . . .	82
5.5.2	Irreversibilität . . . . .	82
5.5.3	2. Hauptsatz nach Clausius (1850) . . . . .	83
5.5.4	Grenzen für den Wirkungsgrad . . . . .	83
5.5.5	2. Hauptsatz nach Kelvin . . . . .	83
5.5.6	Carnotscher Kreisprozeß . . . . .	84
5.5.7	Adiabaten . . . . .	85
5.5.8	Wirkungsgrad . . . . .	85
5.6	3. Hauptsatz . . . . .	85
5.7	Wärmemaschinen . . . . .	85
5.7.1	Perpetuum Mobile . . . . .	85
5.7.2	Heizluftmotor / Stirlingmotor . . . . .	86
5.7.3	Definition der absoluten Temperatur . . . . .	86
5.7.4	Umkehrung von Prozessen . . . . .	86
5.7.5	Wirkung . . . . .	86
5.8	Zustandsgrößen . . . . .	87
5.8.1	Extensive Zustandsgrößen . . . . .	87
5.8.2	Intensive Zustandsgrößen . . . . .	87
5.9	Entropie (Boltzmann, Gibbs) . . . . .	88
5.9.1	Beispiele . . . . .	88
5.9.2	Zusammenhang Entropie, Ordnung und Unordnung . . . . .	88
5.9.3	Entropie und Unordnung . . . . .	89
5.10	Dewargefäß . . . . .	89

<b>6</b>	<b>Elektrodynamik (Vorwort)</b>	<b>90</b>
6.1	Elektromagnetisches Feld . . . . .	90
6.1.1	Elektromagnetische Wellen . . . . .	91
<b>7</b>	<b>Elektrostatik</b>	<b>92</b>
7.1	Experimentelle Grundbefunde . . . . .	92
7.1.1	2. Arten von Elektrischen Ladungen . . . . .	92
7.1.2	Übertragung von Ladungen . . . . .	92
7.1.3	Ladung von Kugeln . . . . .	92
7.1.4	Wiso geht das? . . . . .	93
7.1.5	Ladung mit Körper verbunden? . . . . .	93
7.1.6	Leitung von Ladungen . . . . .	93
7.1.7	Grösse von Ladungen . . . . .	94
7.1.8	Zusammenhang Kraft, Ladung und Abstand . . . . .	94
7.2	Gesetze . . . . .	94
7.2.1	Coulombsche-Gesetz . . . . .	94
7.2.2	Gauß'sches Gesetz . . . . .	95
7.2.3	Räumlich ausgedehnte Ladungen . . . . .	96
7.2.4	Elektrischer Fluss aus der Raumladung . . . . .	96
7.2.5	Potentielle Energie . . . . .	97
7.2.6	Elektrisches Potential . . . . .	97
7.2.7	Spannung . . . . .	98
7.2.8	Skalares Potential . . . . .	98
7.2.9	Ein Zusammenhang . . . . .	99
7.2.10	Poissongleichung . . . . .	99
7.2.11	Laplace Differentialgleichung . . . . .	99
7.2.12	Feldlinien . . . . .	99
7.3	Zusammenfassung . . . . .	100
7.3.1	Gauß'sche Gesetz . . . . .	100
7.3.2	Hohlkugel . . . . .	100
7.3.3	Hohlzylinder . . . . .	102
7.3.4	Faraday Käfig . . . . .	103
7.4	Experimente zur Influenz . . . . .	103
7.4.1	Influenzwurst . . . . .	103
7.4.2	Faraday Becher . . . . .	103
7.4.3	Van-de-Graaff-Generator . . . . .	104
7.4.4	Elektrophor . . . . .	104
7.4.5	Plattenkondensator . . . . .	104
7.5	Kondensator . . . . .	104
7.5.1	Erklärung . . . . .	104
7.5.2	Beschreibung . . . . .	105
7.5.3	Kugelkondensator . . . . .	105
7.5.4	Plattenkondensator . . . . .	106
7.5.5	Kombination von Kondensatoren . . . . .	110
7.5.6	Erhöhung der Kapazität . . . . .	111
7.6	Elektrische Eigenschaften von Materie . . . . .	111
7.6.1	Elektrische Dipole . . . . .	111
7.6.2	Dielektrika im elektrischen Feld . . . . .	113
7.6.3	Freie Ladungen . . . . .	115
7.6.4	Dielektrische Verschiebung . . . . .	118
7.6.5	Dielektrische Verschiebung . . . . .	118
7.7	Elektrostatische Effekte . . . . .	119
7.7.1	Elektrostriktion / Piezoeffekt . . . . .	119
7.7.2	Ferroelektrizität . . . . .	119

<b>8 Elektrische Ströme</b>	<b>120</b>
8.1 Realisierung von Strömen . . . . .	120
8.1.1 Beschreibung von Strömen . . . . .	120
8.1.2 Zusammenhang Ladungsdichte und Stromdichte . . . . .	121
8.1.3 Erhaltung der Ladung . . . . .	121
8.2 Elektrischer Widerstand, elektrische Leitfähigkeit . . . . .	122
8.2.1 Ohmsche Gesetz . . . . .	122
8.2.2 Aufladen eines Kondensators . . . . .	123
8.2.3 Gleichstromnetzwerke . . . . .	125
8.2.4 Kirchhoffsche Gesetze . . . . .	126
8.2.5 Innenwiderstand . . . . .	128
8.3 Stromleistung . . . . .	129
8.4 Stromleitung . . . . .	130
8.4.1 Stromleitung in Festkörpern . . . . .	130
8.4.2 Stromleitung in Flüssigkeiten . . . . .	132
8.4.3 Stromleitung in Gasen . . . . .	135
<b>9 Magnetostatik</b>	<b>137</b>
9.1 Experimentelle Befunde . . . . .	137
9.1.1 Magneten . . . . .	137
9.1.2 Ørsted-Versuch . . . . .	138
9.1.3 Weitere Versuche . . . . .	138
9.1.4 Erklärung . . . . .	138
9.1.5 Spule . . . . .	138
9.2 Beschreibung . . . . .	139
9.2.1 Magnetische Flussdichte . . . . .	139
9.2.2 Magnetische Spannung . . . . .	140
9.2.3 Magnetische Spannung um geraden Leiter . . . . .	140
9.2.4 Rückblick . . . . .	142
9.2.5 Beispiel . . . . .	142
9.2.6 Lösung der Maxwellgleichungen . . . . .	144
9.2.7 Biot-Savart-Gesetz . . . . .	146
9.2.8 Spezielle Magnetfelder . . . . .	146
9.2.9 Langgestreckte Spule . . . . .	148
9.2.10 Stromschleife . . . . .	148
9.2.11 Magnetisches Dipolmoment . . . . .	152
9.2.12 Helmholtz-Spulenpaar . . . . .	152
9.3 Ladungen im Magnetfeld . . . . .	153
9.3.1 Experimentelle Befunde . . . . .	153
9.3.2 Lorentzkraft . . . . .	154
<b>10 Zeitabhängige Felder</b>	<b>156</b>
10.1 Zeitabhängige Magnetfelder . . . . .	156
10.1.1 Experimente . . . . .	156
10.1.2 Folgerung . . . . .	157
10.1.3 Anwendungen . . . . .	157
10.1.4 Induktionsgesetz . . . . .	157
10.1.5 Induktivität von Leiteranordnungen . . . . .	159
10.2 Zeitabhängige Elektrische Felder . . . . .	162
10.2.1 Rückblick . . . . .	162
10.2.2 Gedankenexperiment . . . . .	162
10.3 Maxwell-Gleichungen für das Vakuum . . . . .	165
10.3.1 Die Gleichungen . . . . .	165
10.4 Magnetische Eigenschaften der Materie . . . . .	166

10.4.1	Magnetische Dipole . . . . .	166
10.4.2	Materie im Magnetfeld . . . . .	168
10.4.3	Magnetische Feldstärke . . . . .	170
10.4.4	Hysteresis Effekt beim Ferro-Magnetismus . . . . .	172
10.5	Maxwell-Gleichungen für ruhende Materie . . . . .	172
10.5.1	Gleichungen . . . . .	172
10.5.2	Berechnungen . . . . .	172
10.5.3	Beispiel . . . . .	173
<b>11</b>	<b>Elektromagnetische Schwingungen</b>	<b>174</b>
11.1	Wechselstrom . . . . .	174
11.1.1	Grundlagen . . . . .	174
11.1.2	Wechselstromleistung . . . . .	175
11.1.3	Drehstrom . . . . .	176
11.1.4	Transformator . . . . .	176
11.1.5	Wechselstrom-Widerstände . . . . .	177
11.1.6	Spezielle Widerstände . . . . .	178
11.2	Elektromagnetische Schwingkreise . . . . .	179
11.2.1	Ungedämpfter . . . . .	179
11.2.2	Gedämpfte Schwingung . . . . .	180
11.3	Offene Schwingkreise . . . . .	181
11.3.1	Hertz'scher Dipol . . . . .	181
<b>12</b>	<b>Elektromagnetische Wellen</b>	<b>182</b>
12.1	Mechanische Grundlagen . . . . .	182
12.1.1	Formeln . . . . .	182
12.2	Elektromagnetische Wellen . . . . .	183
12.2.1	Wellenausbreitung in Abwesenheit von $\rho, \vec{j}$ Rotationsausbildung . . . . .	183
12.2.2	Im Medium . . . . .	183
12.2.3	Energiestrahlung . . . . .	185
12.3	Wodrin schwingen die Wellen? . . . . .	185
12.3.1	Wechsel des Bezugssystem . . . . .	185
<b>13</b>	<b>Relativistische Physik</b>	<b>186</b>
13.1	Einführung und Grundlagen . . . . .	186
13.1.1	E-M-Felder in verschiedenen Bezugssystemen . . . . .	186
13.1.2	Michelson und Morley Experiment . . . . .	187
13.2	Relativität . . . . .	188
13.2.1	Prinzip der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit . . . . .	188
13.2.2	Gleichzeitigkeit . . . . .	188
13.2.3	Zeitmessung . . . . .	188
13.2.4	Längenmessung . . . . .	190
13.3	Lorentz-Transformation . . . . .	192
13.3.1	Galilei-Transformation . . . . .	192
13.3.2	Raum-Zeit-Diagramme . . . . .	193
13.3.3	Lorentztransformation . . . . .	194
13.3.4	Raum-Zeit-Diagramme . . . . .	196
13.4	Geschwindigkeitsaddition . . . . .	196
13.4.1	Realativistisch . . . . .	197
13.4.2	Addition mit Lichtgeschwindigkeit . . . . .	197
13.5	Masse und Energie . . . . .	197
13.5.1	Relativistischen Masse . . . . .	198
13.5.2	Einstein Massenformel . . . . .	198
13.5.3	Gesamtenergie . . . . .	198

<b>14 Ausblick</b>	<b>199</b>
14.1 Photoelektrische Effekt . . . . .	199
14.1.1 Experiment . . . . .	199
14.1.2 Lösungsidee . . . . .	199
14.1.3 Lösung . . . . .	199
14.1.4 Verknüpfung mit Relativitätstheorie . . . . .	200
14.1.5 Materiewellen . . . . .	200
<b>15 Optik</b>	<b>201</b>
15.1 Geschichte der Physik des Lichtes . . . . .	201
15.1.1 Interpretationen des Lichtes . . . . .	201
15.1.2 Lichtgeschwindigkeit . . . . .	202
15.2 Beschreibung der Ausbreitung des Lichtes . . . . .	203
15.2.1 Huygens 1692-1695 . . . . .	203
15.2.2 Fermatsche Prinzip . . . . .	203
15.2.3 Reflexion . . . . .	204
15.2.4 Brechung . . . . .	204
15.2.5 Dispersion . . . . .	206
15.2.6 Polarisation des Lichtes . . . . .	206
15.3 Geometrische Optik . . . . .	210
15.3.1 Spiegeln . . . . .	210
15.3.2 Linsen . . . . .	214
15.3.3 Linsen mit 2 Gekrümmten Flächen . . . . .	214
15.3.4 Dicke Linsen . . . . .	216
15.3.5 Abbildungsfehler . . . . .	217
15.3.6 Optische Instrumente . . . . .	218
15.3.7 Mikroskope . . . . .	220
15.4 Wellenoptik . . . . .	221
15.4.1 Einzelspalt . . . . .	222
15.4.2 Beugung am Gitter . . . . .	224
15.4.3 Interferenz Dünner Schichten . . . . .	224
<b>16 Vektoranalysis</b>	<b>226</b>
16.1 Vektoren . . . . .	226
16.2 Gradient . . . . .	226
16.2.1 In Kugelkoordinaten . . . . .	226
16.3 Divergenz . . . . .	227
16.3.1 Divergenz eines Produktes mit einem Skalar . . . . .	227
16.4 Rotation . . . . .	227
16.5 Laplace Operator . . . . .	227
16.6 Satz von Gauss . . . . .	227
16.7 Stoke'scher Integralsatz . . . . .	227
16.8 Formeln . . . . .	228



# Kapitel 1

## Vorwort

Mit diesem Skriptum darf jeder machen, was er will. Es ist nicht unbedingt nötig, dass der Autor es liest oder nur ansieht. Es ist auch durch aus eine legitime Nutzen aus Hass auf die Lineare Algebra, dieses Skriptum auf CD zu brennen, und diese CD dann als Frisbeescheibe zu verwenden, obwohl der Autor absolut kein Verständnis dafür hätte, da die Physik doch schön ist.

Ausserdem sollte bei der Weiterverbreitung des Skriptum immer diese Informationen erhalten bleiben.

Dieses Skriptum wurde erstellt von Alexander Murauer und Helge Krüger und basiert auf der Vorlesung „Einführung in die Physik I“ von Georg Reischl, Paul Wagner und Anton Zeilinger im Wintersemester 2003 / 2004.

Die Autoren übernehmen keine Verantwortung für die Richtigkeit der in diesem Skriptum enthaltenen Informationen, noch für irgendwelche Schäden, die durch das Benutzen des Skriptums, so wie durch das Durchführen von ihm beschriebenen Experimenten geschehen können.

Manche in diesem Skriptum enthaltene Bilder sind urheberrechtlich geschützt, und dürfen deswegen nur beschränkt weiter verarbeitet werden.

Und vergesst nie die Antwort lautet 42.

Anregungen und Ergänzungen bitte per Mail an [a0302790@unet.univie.ac.at](mailto:a0302790@unet.univie.ac.at).

Bilder gibt es unter [http://zina06.physik.uni-bonn.de/brock/teaching/pnf2\\_ss02/](http://zina06.physik.uni-bonn.de/brock/teaching/pnf2_ss02/)

# Kapitel 2

## Einleitung in die Physik

$\varphi\nu\sigma\iota\sigma$  ('physis') : Ursprung Aufgaben:

- Ergründen von Phänomenen
- Erläuterung von Phänomenen durch Zurückführen auf möglichst wenige Grundprinzipien

### 2.1 System und Modell

- Haben abgegrenzte räumliche Bereiche
- Haben eine Umgebung

Zustand

→ zeitlich unveränderliches System

Beobachtungen, Experimente  $\Rightarrow$  Idealisierung in Form eines Modells

Theorie:

- Verständnis
- Vorhersage zukünftiger Entwicklungen, aber kein strenger Determinismus

Experimente:

- Ausgangspunkt für Modelle
- Prüfung von Theorien

Modelle

- Teilchen
  - Planetenbewegung
  - Moleküle, Atome
  - Fall im Schwerfeld

### 2.2 Entwicklung des phys. Weltbildes

- Mechanik
  - Aristoteles

- \* führte Raum- und Zeitmodell ein
- Newton
  - \* Kraft
- Thales von Milet
  - \* beobachtete magnetische Erscheinungen 600-500 v. Chr. (Magnetisch ... Stadt Magnesia, Kleinasien)
- Demokrit
  - \* postulierte Materie besteht aus kleinen, unteilbaren Teilchen
- Archimedes (287-212 v. Chr.)
  - \* Hebelgesetze
  - \* Auftrieb (er konnte damit Zusammensetzung von Legierungen feststellen)
  - \* benutzte spekulative Vorgangsweise, keine Modellbildung
- Galilei (1564-1642)
  - \* Man muss experimentieren, nicht alles ist durch reines Denken erforschbar.
- Kepler (1571-1630)
  - \* Planetenbewegung
- Newton (1642-1727)
  - \* die ersten großen vereinheitlichten Theorien, gleiche Erklärung für fallenden Apfel und Planetenanziehung
  - \* Zurückführung der Keplerschen Gesetze auf Gravitationsgesetz
  - \* Trägheitsbegriff
- Loschmidt (1821-1895)
  - \* Zahl der Gasmoleküle pro Mol
- Boltzmann (1844-1906)
  - \* Thermodynamische Begriffe (Entropie, Temperatur)
- Willebrordus Snellius (1580-1626)
  - \* Optik (Brechungsgesetz Licht)
- Isaac Newton (1643-1727)
  - \* Spektralfarben
- Christian Huygens (1629-1695)
- Augustin Fresnel (1788)
- James Clerk Maxwell (1831-1879)
  - \* Optik+Elektrodynamik
  - \* Grundstein relativistischer Grundsätze
  - \* Trägermedium Licht ist der Äther
- Albert Einstein (1879-1955)
  - \* Grundlage relativistischer Physik
- Max Planck (1858-1947)
  - \* Plancksche Konstante
  - \* Quantenhaftigkeit (Quantum = (kleine) Menge) der Natur
- Erwin Schrödinger (1887-1961)
  - \* Berühmte Differentialgleichung (Schrödinger Gleichung)

- Werner Heisenberg (1901-1976)
  - \* Unschärferelation
- Albert Michelson (1852-1931) und Edward Morley (1838-1923)
  - \* Invarianz der Lichtgeschwindigkeit
- Pierre(1859-1906) et Marie Curie (1867-1934)
  - \* Radioaktivität
- Ernest Rutherford (1871-1937)
  - \* Kernphysik
- Anton Zeilinger
  - \* Das Synchronisationsproblem der Outputunit

## 2.3 Bedeutung der Physik in anderen Wissensgebieten

1. Chemie
  - Molekülstruktur
  - chem. Bindung
2. Astronomie/Astrophysik
  - Entwicklung und Zusammensetzung von Sternen
  - Beobachtungsmethoden
3. Meteorologie
  - Aerodynamik
  - Phasenübergänge
  - Aerosoldynamik
  - Klimaentwicklung
4. Biologie/Medizin
  - Energiehaushalt von Zellen
  - Transport über Membranen
  - Wechselwirkung mit Strahlung
  - Markierungsverfahren
  - Diagnosemethoden
5. Technik
  - Halbleiterentwicklung
  - Laser
  - Meßtechnik
  - Nachrichtenübertragung
  - Neue Werkstoffe (Nanotechnologie)

## 2.4 Der Meßvorgang

System S; Beobachter B (Makroskopisch)

Beide befinden sich in einem Gesamtsystem und wechselwirken miteinander.

- S ist makroskopisch  
Einfluß von B kann klein gemacht werden. Damit erhält man objektive Eigenschaften des Systems S. Übergang Mikro-Makroskopisch = Nano  $\Rightarrow$  besondere Eigenschaften der neuen Materialien.
- S ist mikroskopisch  
Einfluß des Beobachters unvermeidbar

Gedankenexperiment

Aufenthalt eines  $e^-$  optisch beobachten.

- Wo ist es?  
Hohe Frequenz benötigt  $\Rightarrow$  große Veränderung des Impulses des  $e^-$
- Welchen Impuls hat es?  
Geringe Frequenz benötigt  $\Rightarrow$  Position 'verschmiert'.

$\Rightarrow$  Unschärferelation

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$$

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} \cong 10^{-34} J.s$$

### 2.4.1 Beschreibung eines Systems mittels phys. Größen

Länge, Zeit, Kraft, Druck, Temperatur...

Messung:

Man vergleicht gleichartige Größen, Vergleichsgröße x Maßeinheit

$$\text{Größe} = \text{Maßzahl} \times \text{Einheit} \quad (2.1)$$

Physikalische Relation:

Relation zwischen den Maßzahlen physikalischer Größen:  $l = v \cdot t$ ;  $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$

### 2.4.2 Welche Basisgrößen wählt man?

Die Wahl der Basisgrößen erfolgt total willkürlich.

#### Absolute Basisgrößen

Willkürlich definiert und unabhängig von anderen Einheiten.

Beispiele:

- Masse, Urkilogramm (Paris, ortsfestes Normal)
- Zeit, Sekunde

**Abgeleitete Basisgrößen**

definiert durch Definitionsrelation

- absoluter Basisgrößen
- willkürliche, konstante Größen (universelle Konstanten)

Beispiel Längendefinition:

$l = c_0 \cdot t$ , wobei

$t$  ... Absolute Basisgröße

$c_0$  ... Vacuum Lichtgeschwindigkeit

$l$  ... Abgeleitete Basisgröße (Einheit: Meter)

**Abgeleitete Größen**

Definiert durch Relationen.

Beispiel: Geschwindigkeit  $v = \frac{l}{t}$ ; Einheit: m/s

**Dimension einer Größe**

2 Bedeutungen:

- Definition Relation [l/t]
- Einheitenbeziehung [m/s]

Überprüfung von physikalischen Relationen:

Beispiel Zentrifugalkraft:

$$\begin{aligned}
 F_z &= m \cdot \omega^2 \cdot r \\
 [F_z] &= [kg \cdot m \cdot s^{-2}] \\
 [m] &= [kg] \\
 [\omega] &= [s^{-1}] \\
 [r] &= [m] \\
 &\Rightarrow \\
 [m \cdot \omega^2 r] &= [kg \cdot s^{-2} \cdot m]
 \end{aligned}$$

Es herrscht Gleichheit.

**Inkohärente Größen (Einheiten)**

Steht in festem Zahlenverhältnis zur Einheit dieser Größe.

z.B.: 10er-Potenzen ( $m, \mu, v, k, M(ega), G(iga), T(era)...$ )

$$\begin{aligned}
 1min &= 60s \\
 1lj(Lichtjahr) &= 9,4605 \cdot 10^{15}m \\
 1kcal &= 4186,9J(oule) \\
 1eV &= 1,602 \cdot 10^{-19}J
 \end{aligned}$$

### Universelle Konstanten

In Definitions-Relation für abgeleitete Basisgrößen treten dimensionierte Konstanten auf. Falls die abgeleitete Basisgröße gleichartig ist mit einer bereits definierten Basisgröße, dann kann man sie auf 1 setzen:  $const. \equiv 1$

Bsp.:  $c_0 = 1 \Rightarrow l = t \Rightarrow 299792458 m/s = 1$  Damit wird Meter zu einer inkohärenten Längeneinheit und es gibt 1 universelle Konstante weniger.

Bsp.: Definition der Wärmemenge

- Am Anfang absolute Basisgröße (Glaube: grundsätzlich neue Größe)  
1 kcal = Wärme um 1 Liter  $H_2O$  um  $1^\circ C$  zu erwärmen

$$\Delta Q = k_w \cdot \Delta w$$

- Joule maß Konstante  $k_w = 2,388 \times 10^{-4} \frac{kcal}{J}$   
man erkannte, dass es sich um eine abgeleitete Basisgröße handelt:  
Q, W gleichartig  $\Rightarrow k_w = 1; 2,3884 \times 10^{-4} \frac{kcal}{J} = 1 \Rightarrow 1kcal = \frac{1}{2,3884 \times 10^{-4}} J$

### SI-Einheiten

Das SI steht für *Système Internationale*.

- **Masse m**

**Messung:** Waage

**Genauigkeit:**  $10^{-10}$

**Vergleich:** Urkilogramm

**Beispiele:**

- $e^- \dots 10^{-30} kg$
- Proton  $\dots 10^{-27} kg$
- Fliege  $\dots 10^{-3} kg$
- Mensch  $\dots 10^2 kg$
- Erde  $\dots 6 \times 10^{24} kg$
- Sonne  $\dots 10^{30} kg$
- Milchstraße  $\dots 10^{42} kg$

- **Zeit t**

**Messung:** Früher  $\frac{1}{86400}$  Sontentag; jetzt: Cs-Atomuhr

**Genauigkeit:**  $10^{-14}$

**Beispiele:**

- Elektron  $\dots 10^{-20} s$
- Herzschlag  $\dots 10^0 s$
- Lichtlaufzeit Sonne-Erde  $\dots 10^3 s$
- Lebensalter Mensch  $\dots 2,5 \times 10^9 s$
- Entwicklung Menschheit  $\dots 2 \times 10^{13} s$
- Alter des Universums  $\dots 5 \times 10^{17} s$

Wichtig ist die pragmatische Betrachtungsweise:

*Zeit ist das Ergebnis eines Zählvorganges eines periodischen Vorganges*

- **Länge l**

**Messung:** früher  $\frac{1}{10^9}$  des Ermeridianquadranten, jetzt: Wegstrecke, die das Licht in  $\frac{1}{\dots} s$  zurücklegt.

**Genauigkeit:**  $5 \times 10^{-9}$

**Beispiele:**

- Radius Proton ...  $10^{-15} m$
- Luftmoleküle Normbed. ...  $10^{-6} m$
- Mensch ...  $10^0 m$
- Sonnensystem ...  $10^{14} m$
- Weltall ...  $5 \times 10^{25} m$

Zur Messung wird unter anderem ein sog. Nonius verwendet. Auf ihm werden 9cm in 10 Teile geteilt. Damit kann man mit einfachen Mitteln auf Zehntel genau messen.

- **Elektrische Stromstärke  $I = \frac{\text{Ladung}}{\text{Zeiteinheit}}$**

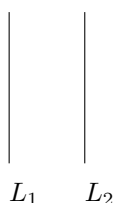
Beispiel:

2 parallele Leiter ( $L_1, L_2$ )  $\Rightarrow$  Wechselwirkung

es gilt  $F = \frac{I_1 \cdot I_2 \cdot l}{d} \cdot \frac{\mu_0}{2 \cdot \pi}$

$\frac{\mu_0}{2 \cdot \pi}$  .. Magnetische Feldkonstante  $\mu_0 = 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \frac{N}{A^2}$

$F = 2 \cdot 10^{-7} N$  für  $I=1A$  mit  $d=1m$  Abstand und  $l=1m$  Länge



- **Temperatur T [Kelvin] (absolute Basiseinheit)**

$1K = \frac{1}{273,16}$  vom Tripelpunkt des Wassers

Temperatur hängt zusammen mit der kinetischen Energie der Moleküle.

$\Rightarrow$  Mittelwert kinetischer Energie eines Moleküls :  $\frac{m}{2} \cdot \bar{v}^2 = \frac{t}{2} \cdot k \cdot T$

$k = 1,38 \cdot 10^{-23} \frac{J}{K}$  ... Boltzmann Konstante

- **Molzahl:** (Anzahl Moleküle)

1kmol ist die Stoffmenge von 12 kg des  $C^{12}$ -Isotops

$n = \frac{1}{N_L} \cdot N$ ;  $N_L = 6,022 \cdot 10^{26} \frac{1}{kmol}$

### 2.4.3 Meßgenauigkeit

Absolut genauer Messung ist unmöglich.

Es gibt 2 Arten von Fehlern:

- Systematische Fehler (schwer quantifizierbar); zB.: störende Effekte (blöde Fehler)
- Statistische Fehler (nicht ausschaltbar); Die Schwankungen kann man mit einer Serie von Messungen (nicht nur eine!) ausmessen

Messung einer Größe x:

- mehrfache Messung,  $x_i$  Einzelmesswerte
- eine statistische Bandbreite (Messungen schwanken) ist gewollt, sonst ist es ein Zeichen für zu ungenaue Messungen
- Histogramm



**Repräsentierter Wert**

$$S = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \text{Min! (gute Wahl von } \bar{x} \text{ erforderlich)}$$

Bestimmung von  $\bar{x}$ :

$$\frac{ds}{d\bar{x}} = -2 \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^n (x_i) - n\bar{x} = 0 \quad (2.2)$$

$$\Rightarrow \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = 0 \quad (2.3)$$

**Wahrer Wert**

Dieser Wert ist meistens unbekannt.

$$x_w = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum (x_i)$$

**Maße für die Streuung von xi**

$x_i - x_w$  ... absoluter Fehler des Meßwertes  $x_i$

Arithmetisches Mittel der Abweichungsquadrate (Varianz):

$$\text{Varianz} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - x_w)^2 \quad (2.4)$$

$x_i - \bar{x}$  ... Abweichung vom arith. Mittel

$$\delta^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

$\delta$  ... Standardabweichung

**Relative Streuung**

$$\frac{\delta}{\bar{x}} = \text{relative Standardabweichung}$$

**Zentraler Grenzwertsatz:**

Die Summe von vielen, beliebig verteilten Zufallsgrößen ist annähernd normalverteilt. (Glockenkurve, Gauß-Verteilung)

$$f(x) = \frac{1}{\delta\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\delta^2}} \quad (2.5)$$

Abschätzung der Abweichungswahrscheinlichkeit:

$$x_i \in [\bar{x} - \delta, \bar{x} + \delta] : \text{Wahrscheinlichkeit} = 68\%$$

$$x_i \in [\bar{x} - 3\delta, \bar{x} + 3\delta] : \text{Wahrscheinlichkeit} = 99,7\%$$

Daraus resultiert die  $3\delta$ -Regel: Alle Meßwerte außerhalb des Bereiches von  $\pm 3 \times \delta$  können vernachlässigt werden.

**Fehlerfortpflanzung**

$$R = R_{(x,y,z)}$$

$x, y, z \dots$  Messwerte

$\delta_x, \delta_y, \delta_z \dots$  Standardabweichungen

$\delta_R \dots$  Absoluter Größtfehler, Worst Case

Abschätzung von  $\delta_R$

$$\delta_R \leq \left| \frac{\partial R}{\partial x} \right| \delta_x + \left| \frac{\partial R}{\partial y} \right| \delta_y + \dots \quad (2.6)$$

**Spezialfall**

$$R = A \cdot x^a \cdot y^b \dots \quad (2.7)$$

$$\delta_R \leq |A \cdot a \cdot x^{a-1} \cdot y^b \dots| \delta_x + |A \cdot x^a \cdot b \cdot y^{b-1} \dots| \delta_y + \dots \quad (2.8)$$

Damit:

$$\boxed{\frac{\delta_R}{R} \leq |a| \cdot \frac{\delta_x}{x} + |b| \cdot \frac{\delta_y}{y} + \dots}$$

**Gaußsches Fehlerfortpflanzungsgesetz**

$$\delta_R = \sqrt{\left( \frac{\partial R}{\partial x} \right)^2 \delta_x^2 + \left( \frac{\partial R}{\partial y} \right)^2 \delta_y^2 + \dots} \quad (2.9)$$

Beispiel

Arithm. Mittelwert (n Messungen)  $\dots \bar{x} = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n)$

$\bar{x} \dots R(x_1, x_2, \dots, x_n)$

$$\begin{aligned} \delta_R &= \sqrt{\frac{1}{n^2} \cdot \underbrace{\delta_{x_1}^2}_{\delta_x} + \frac{1}{n^2} \cdot \underbrace{\delta_{x_2}^2}_{\delta_x} + \dots} = \\ &= \sqrt{\frac{1}{n^2} \cdot \delta_x^2 + \frac{1}{n^2} \cdot \delta_x^2 + \dots} = \\ &= \sqrt{\frac{n}{n^2} \cdot \delta_x^2} = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \delta_x \end{aligned}$$

## Kapitel 3

# Mechanik

### 3.1 Kinematik von Massenpunkten

Behandelt die Bewegung von Massenpunkten ohne Beschreibung der Ursache.  
Bahnkurve (in Parameterdarstellung):  $r(t)$

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

$$[r(t)] = [m] \quad (3.2)$$

#### 3.1.1 Arten von Bewegungen

- Geradlinig:

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x = a \cdot t \\ y = b \cdot t \\ z = c \end{pmatrix}$$

Das Bezugssystem wird so gelegt, dass die Gerade in der Ebene  $c$  liegt.

- Kreisbewegung:

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x = R \cdot \cos(\omega \cdot t) \\ y = R \cdot \sin(\omega \cdot t) \\ z = c \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = R^2 \cdot \sin^2(\omega \cdot t) + R^2 \cdot \cos^2(\omega \cdot t) = R^2$$

#### 3.1.2 Geschwindigkeit

Mit  $\vec{v}$  bezeichnen wir die Geschwindigkeit. Wir definieren sie als den zurückgelegten Weg pro Zeiteinheit. Daher folgt auch die Einheit der Geschwindigkeit:  $m \cdot s^{-1}$ .

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}} \quad (3.3)$$

$$|\vec{v}| = v \quad (3.4)$$

### 3.1.3 Beschleunigung

Die Beschleunigung  $\vec{a}$  ist die Geschwindigkeitsänderung pro Zeiteinheit.

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{v}_{(t+\Delta t)} - \vec{v}_{(t)}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}} \quad (3.5)$$

$$|\vec{a}| = a \quad (3.6)$$

$$[\vec{a}] = \left[ \frac{m}{s^2} \right] \quad (3.7)$$

### 3.1.4 Spezielle Bewegungen

- Unbeschleunigte Bewegung

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}} = 0$$

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \text{const.} = \vec{v}_0 \Rightarrow \vec{r} = \vec{v}_0 \cdot t + \text{const.}$$

$$\text{Anfangsbedingung: } \vec{r}_0 = \vec{r}_{(t=0)}$$

$$\Rightarrow \vec{r} = \vec{v}_0 \cdot t + \vec{r}_0 \quad (3.8)$$

- Gleichförmig beschleunigte Bewegung

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}} = \text{const.} = \vec{a}_0$$

$$\Rightarrow \vec{v} = \dot{\vec{r}} = \vec{a}_0 \cdot t + \text{const.}$$

$$\text{Anfangsbedingung: } \vec{v}_{(t=0)} = \vec{v}_0$$

$$\Rightarrow \vec{v} = \dot{\vec{r}} = \vec{a}_0 \cdot t + \vec{v}_0$$

$$\vec{r} = \vec{a}_0 \cdot \frac{t^2}{2} + \vec{v}_0 \cdot t + \text{const.}$$

$$\text{Anfangsbedingung: } \vec{r}_{(t=0)} = \vec{r}_0$$

$$\Rightarrow \vec{r} = \vec{a}_0 \cdot \frac{t^2}{2} + \vec{v}_0 \cdot t + \vec{r}_0 \quad (3.9)$$

**Beispiel** Bewegung im Schwerfeld: Freier Fall

$$\vec{a} = \text{const.} = \vec{a}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix}; \vec{r}_0 = 0, \vec{v}_0 = 0$$

$$\Rightarrow \vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}_0 \cdot t = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -gt \end{pmatrix}$$

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 \cdot t + \vec{a}_0 \cdot \frac{t^2}{2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \cdot \frac{t^2}{2} \end{pmatrix}$$

### 3.1.5 Versuch Fallschnüre

2 Annahmen:

- Unbeschleunigte Bewegung

$$|\vec{r}| = v_0 \cdot t \Rightarrow t = \frac{r}{v_0}$$

- Gleichförmig beschleunigte Bewegung

$$|\vec{r}| = \frac{g^2}{2} \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2r}{g}}$$

Man sieht, dass die zweite Annahme stimmt, weil die in quadratischen Abständen angeordneten Gewichte regelmässig am Boden aufkommen.

### 3.1.6 Kreisbewegung

Wir betrachten eine Kreisbewegung eines Teilchens um eine Drehachse.

Der Weg den das Teilchen durchschritten hat:  $s$ . Mit  $\vartheta$  bezeichnen wir die Neigung der Geraden durch die Position des Teilchens und dem Ursprungs zur Drehachse, und mit  $\varphi$  den zurückgelegten Winkel.  $r$  ist die Position des Teilchens vom Ursprung aus gesehen, und  $R$  vom Mittelpunkt der Drehbewegung, also wenn man die Bewegung des Teilchens in eine Ebene legt, der Schnitt dieser Ebene mit der Drehachse.

$$s = R \cdot \varphi \quad (3.10)$$

$$R = r \cdot \sin(\vartheta) \quad (3.11)$$

#### Winkelgeschwindigkeitsvektor

Die Winkelgeschwindigkeit ist der Winkel, den ein Teilchen pro Zeiteinheit überschreitet. Es ist bei Kreisbewegungen nicht sinnvoll die Geschwindigkeit des Teilchens zu beschreiben, weil sich zumindest die Richtung dieses Vektor immer zu ändert.

Definition:

- $[\vec{\omega}] = [s^{-1}]$
- $\vec{\omega} = \omega = \frac{d\varphi}{dt}$
- $\vec{\omega}$  parallel zur Drehachse
- Richtungssystem entsprechend Rechtsschraubenregel (Rechte Hand Regel)
- $\vec{\omega}$  ... Pseudovektor (Axialer Vektor)

#### Winkelbeschleunigung

- $|\dot{\vec{\omega}}| = \dot{\omega} = \frac{d^2\varphi}{(dt)^2}$
- $[\vec{\omega}] = [s^{-2}]$

Annahme: Drehachse konstant  $\Rightarrow \dot{\vec{\omega}}$  parallel  $\vec{\omega}$

#### Geschwindigkeit

- $|\vec{v}| = v = \frac{ds}{dt} = R \cdot \frac{d\varphi}{dt} = \omega R$
- Vektorielle Schreibweise:  $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$
- Betrag:  $|\vec{v}| = |\vec{\omega} \times \vec{r}| = \omega \cdot r \cdot \sin(\vartheta) = \omega R$
- Richtung:  $\perp \vec{\omega}, \perp \vec{r}$
- Orientierungssinn:

#### Beschleunigung

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = (\vec{\omega} \times \vec{r}) + (\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}) = (\vec{\omega} \times \vec{r}) + (\vec{\omega} \times \vec{v}) = \underbrace{(\vec{\omega} \times \vec{r})}_{a_t} + \underbrace{(\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}))}_{a_n} \quad (3.12)$$

- $\boxed{\vec{a}_t = \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}}$  ... Tangentialbeschleunigung
  - Richtung: Es gilt  $\dot{\vec{\omega}} \parallel \omega$   
damit:  $\vec{a}_t \parallel \vec{v}$

- Länge:  $|\vec{a}_t| = \left| \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} \right| = \dot{\omega} \cdot r \cdot \sin(\sigma) = \boxed{\text{mit } r \cdot \sin(\sigma) = R} = \dot{\omega} \cdot R = \frac{dv}{dt}$   
 $v = |\vec{v}|$  ... Bahngeschwindigkeit
- $\boxed{\vec{a}_n = \vec{\omega} \times \vec{v} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})}$  ... Normalbeschleunigung od. Zentripetalbeschleunigung
  - Richtung:  $\perp \vec{\omega}$  und  $\perp \vec{v}$   
 Nach innen (zum Zentrum der Drehbewegung) gerichtet.
  - Länge:  $|\vec{a}_n| = |\vec{\omega} \times \vec{v}| = \omega \cdot v = \omega^2 \cdot R = \boxed{\text{mit } v = \omega \cdot R \Rightarrow \omega = \frac{v}{R}} = \frac{v^2}{R}$

## 3.2 Dynamik von Massenpunkten

Bei der Dynamik des Massenpunktes beschäftigen wir uns im Gegensatz zur Kinematik des Massenpunktes nicht nur mit der Beschreibung der Bewegung, sondern auch mit ihren Ursachen.

### 3.2.1 Allgemeines

Betrachtung:

- Kräfte als Ursache für Beschleunigungen
- Kräfte wirken auf Massen

Reichweite der Wechselwirkung:

- lang: Bsp.: Gravitation, elektr./magn. Kräfte
- kurz: Bsp.: Mechanische Stoßvorgänge (im Augenblick des Kontakts)

### 3.2.2 Newtonsche Axiome

Die Newtonschen Axiome bilden die Grundlage der Dynamik des Massenpunktes.

1. Trägheitssatz  
 Kräftefreie Körper bewegen sich geradlinig gleichförmig
  - Gilt in Inertialsystemen
  - Inertialsystem: System in dem das 1. Newtonsche Axiom gilt.
2. Impulsänderung wird hervorgerufen durch Kraft

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad (3.13)$$

Impuls:  $\vec{p} = m \cdot \vec{v}$

für konstante Masse  $\Rightarrow \vec{F} = m \cdot \underbrace{\frac{d\vec{v}}{dt}}_{\vec{a}} = m \cdot \vec{a}$

für konstantes  $\vec{F}_0 \Rightarrow$  konstante Beschleunigung  $\vec{a}_0 = \frac{\vec{F}_0}{m}$

**Versuch**

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 \cdot t + \vec{a}_0 \cdot \frac{t^2}{2} \dots \text{(von vorher)}$$

Im Versuchsaufbau wird, der Einfachheit halber, das Koordinatensystem so gelegt, dass  $r_0 = 0$  und  $v_0 = 0$ . Da der Versuch nur eindimensional ist, also der Reiter der sich auf der Luftkissenbahn bewegt sich nur in eine Richtung bewegen kann, kann man auf eine Vektorschreibweise komplett verzichten, also

$$\Rightarrow r = |\vec{a}_0| \cdot \frac{t^2}{2}$$

In dem Versuch halten wir die Kraft, die die Masse (den Reiter) beschleunigt konstant:

$$\begin{aligned} F_0 &= a_0 \cdot \frac{t^2}{2} = \text{const.} \\ \Rightarrow a_0 \cdot t^2 &= \text{const.} \\ a_0 &\propto \frac{1}{t^2} \end{aligned}$$

 $\propto \dots \text{Proportional zu}$ 

Die Wegstrecke  $r$  bleibt bei allen Einzelversuchen am Versuchsaufbau konstant.

$$\Rightarrow r = \text{const.} \quad (3.14)$$

Die gemessenen Ergebnisse wurden in folgende Tabelle eingetragen:

m	$t_1, t_2$ (2 Messwerte)		$\frac{1}{t^2} \propto a_0$	m.a=const. (weil $F=\text{const.}$ )
2	2,35	2,35	0,181	0,362
3	2,80	2,79	0,128	0,384
2+2=4	3,28	3,28	0,093	0,372

**Versuch 2**

Gleicher Versuchsaufbau wie bei Versuch 1, jedoch wird diesmal die Kraft variiert und die Masse konstant gehalten.

$$m = \text{const.} \quad (3.15)$$

F	t [s]		$\frac{1}{t^2} \propto a_0$	$F/a_0$
4	2,89	2,90	0,119	33,6
3	3,33	3,35	0,0896	33,48
2	4,10	4,09	0,0596	33,56
1	6,02	5,89	0,0284	35,21
		5,9		

Die drei Meßwerte für  $F=1$  werfen wir weg, weil die Schnur den Versuchsaufbau bei kleinen Kräften schleift und deshalb das Ergebnis verfälscht.

**3. Newtonsche Axiom**

Für Kräfte auf 2 wechselwirkende Körper/Massepunkte gilt:

$$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12} \quad (3.16)$$

Dies bedeutet, dass wenn eine Kraft wirkt auch immer eine Gegenkraft wirkt. Allerdings muss betrachtet werden, auf welchen Körper die Kraft wirkt. Denn die Kraft  $\vec{F}_{21}$  wirkt vom zweiten Körper auf den ersten Körper. Dies bedeutet sie führt zu einer Impulsänderung des ersten Körpers, und hat keine Auswirkung auf den zweiten Körper.

### 3.2.3 Erhaltungssätze

Falls äußere Kraft verschwindet, dann ist Impuls konstant.

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad (3.17)$$

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v} \quad (3.18)$$

#### Impulserhaltung

Dies bedeutet, dass in einem System auf das keine Kräfte wirken, der Gesamtimpuls des Systems konstant bleibt.

Dies gilt auch für ein System von Massenpunkten. (Gesamtimpuls, gesamte Äußerung Kraft)

#### Versuch

Aufbau wie oben aber  $m_1 \neq m_2$

$m_1$	$\frac{1}{t} \approx v_1$	$m_1 \cdot v_1$	$m_2$	$\frac{1}{t} \approx v_2$	$m_2 \cdot v_2$
2	0,641	1,282	1	1,299	1,299

Achtung:  $\vec{v}_1$  hat andere Richtung als  $\vec{v}_2$

Am Anfang: Gesamtimpuls=0; Ende: Gesamtimpuls=0

#### Versuch

$m_1$	$\frac{1}{t} \approx v_1$	$m_1 \cdot v_1$	$m_2$	$\frac{1}{t} \approx v_2$	$m_2 \cdot v_2$	$m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2$
1	1,064	1,064	1	0	0	1,064
1	0	0	1	1,031	1,031	1,031
2	1,020	2,040	1	0	0	2,040
2	0,308	0,616	1	1,351	1,351	1,967

#### Versuch 2

$m_1$	$v_1 \approx \frac{1}{t}$	$m_1 \cdot v_1$	$m_2$	$v_2 \approx \frac{1}{t}$	$m_2 \cdot v_2$	$m_1 \cdot v_1 + m_1 \cdot v_1$
1	1,126	1,124	1	0	0	1,124
1	0,526	0,526	1	0,526	0,526	1,053
1	0,826	0,824	1	0	0	0,826
1	0,368	0,368	1	0,368	0,368	0,735
2	0,775	1,550	1	0	0	1,550
2	0,442	0,885	1	0,442	0,442	1,327

### 3.2.4 Drehimpuls

Beim Drehimpuls ist zu beachten, dass es für die Existenz diesen eine Drehachse braucht. Der Radiusvektor gibt den Abstand Angriffspunkt des Impulses zur Drehachse an.

$\vec{p}$  ... Impuls

$\vec{r}$  ... Radius(Ortsvektor)

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \quad (3.19)$$

$$[\vec{L}] = [kg \cdot m^2 \cdot s^{-1}] \quad (3.20)$$



### 3.2.5 Drehmoment

Wie beim Drehimpuls braucht es für den Drehmoment eine Drehachse.

$$\vec{N} = \vec{r} \cdot \vec{F} \quad (3.21)$$

$$[\vec{N}] = [kg \cdot m^2 \cdot s^{-2}] \quad (3.22)$$

### 3.2.6 Zusammenhang von Drehimpuls und -moment

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{L}}{dt} &= \underbrace{\left( \underbrace{\dot{\vec{r}}}_{\vec{v}} \times \underbrace{\vec{p}}_{m \cdot \vec{v}} \right)}_{=0} + \underbrace{\left( \vec{r} \times \underbrace{\dot{\vec{p}}}_{\vec{F}} \right)}_{\vec{N}} \\ \frac{d\vec{L}}{dt} &= \vec{N} \end{aligned}$$

### 3.2.7 Erhaltung des Drehimpulses

Wenn äußeres Drehmoment  $\vec{N} = 0$ , dann ist der Drehimpuls  $\vec{L}$  konstant.

#### Spezialfall: Zentralkräfte

- Nennt man Zentralkräftefeld
- $\vec{r} \times \vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{L} = \text{const}$

### 3.2.8 Massenmittelpunkt

$$\vec{R} = \frac{\sum (m_i \cdot \vec{v}_i)}{\sum m_i} \quad (3.23)$$

$$\Rightarrow (\sum m_i \cdot \vec{R}) = \sum (m_i \cdot \vec{r}_i) \quad (3.24)$$

$$(\sum m_i \cdot \dot{\vec{R}}) = \sum \vec{p}_i \quad (3.25)$$

$$\frac{d}{dt} [\sum m_i \cdot \dot{\vec{R}}] = \sum \dot{\vec{p}}_i = \sum \vec{F}_i \quad (3.26)$$

$\vec{F}$ ... ist dabei die gesamte äußere Kraft.

#### Massenmittelpunktsatz

Falls die gesamte äußere Kraft = 0 ist, dann ist der gesamte Impuls der im Massenmittelpunkte vereinigt gedachten Masse konstant.

$$\boxed{(\sum m_i) \ddot{\vec{R}} = \sum \vec{F}}$$

### 3.2.9 Arbeit und Leistung

#### Arbeit

Die Arbeit ist gegen durch den Weg den man gegen eine Kraft zurücklegt. Wenn ich zum Beispiel etwas hoch hebe verrichte ich Arbeit gegen die Gravitationskraft. Wenn ich hingegen etwas nur auf gleicher Höhe verschiebe, verrichte ich keine Arbeit gegen die Gravitationskraft.

$$A = \int_{P_1}^{P_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (3.27)$$

$$[A] = [Nm] = [J] \quad (3.28)$$

#### Leistung

Die Leistung ist die Arbeit, die pro Zeiteinheit verrichtet wird.

$$P = \frac{dA}{dt} \quad (3.29)$$

$$= \frac{d}{dt} \int_{P(t_0)}^{P(t)} \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (3.30)$$

$$= \frac{d}{dt} \int_{t_0}^t \underbrace{\vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}}_{\vec{v}} \cdot dt \quad (3.31)$$

$$\Rightarrow P = \vec{F} \cdot \vec{v} \quad (3.32)$$

$$[P] = \left[ \frac{J}{s} \right] = [W] \quad (3.33)$$

#### Beispiel: Senkrechter Wurf

$$\vec{r}_0 = 0$$

$$\vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v_0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{F}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -F_0 \end{pmatrix} = \text{const.}$$

$$\vec{F}_0 = m \cdot \ddot{\vec{r}} \Rightarrow \ddot{\vec{r}} = \frac{\vec{F}_0}{m}$$

$$\dot{\vec{r}} = \vec{v} = \frac{\vec{F}_0}{m} \cdot t + \vec{v}_0$$

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 \cdot t + \frac{\vec{F}_0}{2m} \cdot t^2$$

$$\text{Damit: } \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v_0 - \frac{F_0}{m} \cdot t \end{pmatrix}$$

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v_0 \cdot t - \frac{F_0 \cdot t^2}{2m} \end{pmatrix}$$

Anfangsposition:  $P_0(\vec{r}_0 = 0)$

$$\begin{aligned} t_0 &= 0 \\ z_0 &= 0 \\ \vec{v} &= \vec{v}_0 \end{aligned}$$

Scheitelposition:  $P_s(\vec{r} = \vec{r}_s)$

$$\begin{aligned} \vec{v} &= 0 \Rightarrow v_0 - \frac{F_0}{m} \cdot t = 0 \Rightarrow t_s = \frac{m \cdot v_0}{F_0} \\ z_s &= v_0 \cdot t_s - \frac{F_0}{2m} \cdot t_s^2 = v_0 \cdot \frac{mv_0}{F_0} - \frac{F_0}{2m} \cdot \frac{m^2 v_0^2}{F_0^2} = \\ &= \frac{mv_0^2}{F_0} - \frac{mv_0^2}{2F_0} = \frac{1}{2} \cdot mv_0^2 = h \end{aligned}$$

Endposition:  $P_e(\vec{r} = 0)$

$$\begin{aligned} v_0 t - \frac{F_0}{2m} \cdot t^2 &= 0 \Rightarrow v_0 = \frac{F_0}{2m} \cdot t \\ t_e &= \frac{2mv_0}{F_0} \\ z_e &= 0 \\ \vec{v} &= -\vec{v}_0 \end{aligned}$$

**Von Kraft  $\vec{F}_0$  geleistete Arbeit**

- Weg  $P_0 \rightarrow P_s$

$$\begin{aligned} A_1 &= \int_{P_0}^{P_s} \vec{F}_0 \cdot d\vec{r} = \vec{F}_0 \cdot \underbrace{\int_{P_0}^{P_s} d\vec{r}}_{\vec{r}_s - \vec{r}_0} \\ &= \vec{F}_0(\vec{r}_s - \underbrace{\vec{r}_0}_0) = -F_0 \cdot h = -\frac{mv_0^2}{2} \end{aligned}$$

- Weg  $P_s \rightarrow P_0$

$$\begin{aligned} A_2 &= \int_{P_s}^{P_0} \vec{F}_0 \cdot d\vec{r} = \vec{F}_0 \cdot \underbrace{\int_{P_s}^{P_0} d\vec{r}}_{\vec{r}_0 - \vec{r}_s} \\ &= \vec{F}_0(\vec{r}_0 - \vec{r}_s) = F_0 \cdot h = \frac{mv_0^2}{2} \end{aligned}$$

→ Es ist insgesamt keine Arbeit verloren gegangen (Reversibler Vorgang)

**Von Kraft  $\vec{F}_0$  erbrachte Leistung**

$$P_{(t)} = \vec{F}_0 \cdot \vec{v}_{(t)} = -F_0 \cdot v_0 + \frac{F_0^2}{m} \cdot t$$

- Anfang: ( $P_0$ )

$$P_{t=0} = -F_0 \cdot v_0$$

- Scheitelposition: ( $P_e$ )

$$\begin{aligned} P_{(t=t_s)} &= -F_0 v_0 + \frac{F_0^2}{m} \cdot t_s \\ &= -F_0 v_0 + \frac{F_0^2}{m} \cdot \frac{mv_0}{F_0} = -F_0 v_0 + F_0 v_0 = 0 \end{aligned}$$

- Endposition: ( $P_e$ )

$$P_{(t=2t_s)} - F_0 v_0 + \frac{F_0^2}{m} \cdot 2 \frac{mv_0}{F_0} = -F_0 v_0 + 2F_0 v_0 = +F_0 \cdot v_0$$

**3.2.10 Kinetische Energie**

Bezugssystem: Zeitpunkt  $t_0 \rightarrow$  Massenpunkt im Punkt  $P_0$

$$\begin{aligned} A &= \int_{P_0}^{P_A} \vec{F} d\vec{r} = \int_{P_0}^{P_A} m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{r} = \\ &= \int_{t_0}^{t_A} m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot dt \\ &= m \cdot \int_{t_0}^{t_A} \underbrace{\vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt}}_{\frac{1}{2} \cdot \frac{dv^2}{dt}} \cdot dt = \\ &\quad \boxed{\frac{d[\vec{v} \cdot \vec{v}]}{dt} = \frac{\vec{v} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{v}}{dt} = \frac{2\vec{v} \cdot \vec{v}}{dt} = 2\vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt}} \\ &= \frac{m}{2} \int_{t_0}^{t_A} \frac{dv^2}{dt} \cdot dt = \frac{m}{2} \int_{t_0(v=0)}^{t_A(v_a=v)} dv^2 \\ &= \frac{m}{2} (v_a^2 - 0) = \frac{m}{2} v_A^2 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$  Kin. Energie:

$$T_A = \frac{m}{2} \cdot v_A^2 \quad (3.34)$$

Die kinetische Energie ist die Energie die aufgewendet werden muss, um einen Körper auf die Geschwindigkeit zu beschleunigen (von Ruhe aus).

### Arbeit längs eines Weges

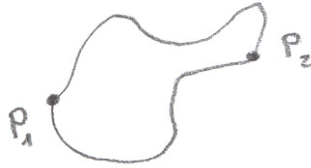
Wir nehmen an, dass ein Körper mit der kinetischen Energie  $T_1$  von einem Punkt ( $P_1$ ) zu einem anderen ( $P_2$ ) hierbei wird die Arbeit  $A$  am Körper verrichtet.

$$\begin{aligned} A &= \int_{P_1}^{P_2} \vec{F} d\vec{r} = \frac{m}{2} \int_{v_1^2}^{v_2^2} d(v^2) \\ &= \frac{m}{2} (v_2^2 - v_1^2) = T_2 - T_1 \\ &\Rightarrow T_2 = T_1 + A \end{aligned} \quad (3.35)$$

Man beachte, dass  $A$  die Arbeit ist, die am Körper verrichtet wird. Dies bedeutet, dass wenn der Körper Arbeit gegen eine Kraft verrichtet, dann ist  $A$  negativ.

#### 3.2.11 Konservative Kräfte

Eine Kraft ist dann konservativ, wenn  $\oint \vec{F} d\vec{r} = 0$ . Dies bedeutet, dass wenn man auf einem beliebigen Weg zu einem Punkt geht, und dann wieder zum Ausgangspunkt zurück, hat man keine Arbeit aufgewendet. Allgemeiner bedeutet dies, dass man um von  $P_1$  nach  $P_2$  zu kommen, immer die gleiche Arbeit aufwenden muss, egal welchen Weg man wählt.



Folgerung: Weg ist unabhängig von der Arbeit. (Gilt nur für konservative Kräfte! Das ist eben die Eigenschaft von konservativen Kräften. Dadurch sind sie definiert.)  
(Hilfestellung: Es wird auf der Wegstrecke sowohl zu, als auch abgeführt.)

#### 3.2.12 Potentielle Energie

Wenn man ein konservatives Kraftfeld hat, macht es Sinn eine potentielle Energie zu definieren. Für diese Definition benötigt man noch einen willkürlich wählbaren Bezugspunkt  $P_0$  bei dem die Potentielle Energie, dann 0 ist. Die Potentielle Energie  $V_A$  gibt, dann an, welche Energie nötig ist, um von  $P_0$  zum Punkt  $P_A$  zu kommen.

$$A = \int_{P_0}^{P_A} \vec{F} d\vec{r} = -V_A \quad (3.36)$$

$V_A$  Potentielle Energie an der Stelle  $P_A$  bezüglich des Bezugspunktes  $P_0$   
Die Potentielle Energie am Bezugspunkt  $P_0 = 0$

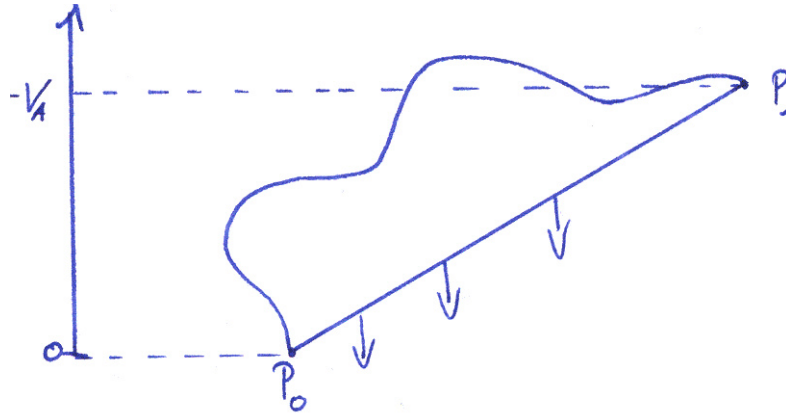
#### Skilift - Beispiel

Der Weg von  $P_0$  zu  $P_1$  stellt den Lift dar und der umgekehrte wird mit den Skiern zurückgelegt.

##### 1. Hinauf

$$\int_{P_0}^{P_1} \vec{F}_0 d\vec{r} < 0$$

Das Potential zur Arbeitsleistung durch die Kraft  $\vec{F}_0$  wird größer.

2. Hinunter

$$\int_{P_1}^{P_0} \vec{F}_0 d\vec{r} > 0$$

**Allgemein**

Die Arbeit längs eines Wegs  $P_1 \rightarrow P_2$ :

$$A = \int_{P_1}^{P_2} \vec{F} d\vec{r} = \underbrace{\int_{P_1}^{P_0} \vec{F} d\vec{r}}_{V_1} + \underbrace{\int_{P_0}^{P_2} \vec{F} d\vec{r}}_{-V_2}$$

$$\Rightarrow \boxed{A = V_1 - V_2}$$

$$(A = T_2 - T_1)$$

**3.2.13 Zusammenhang zwischen Kraft und Potentieller Energie**

Die Kraft hängt über den Gradienten mit der Potentiellen Energie zusammen. Der Gradient besteht aus den partiellen Ableitungen einer Funktion. Dies bedeutet, dass der Gradient der Potentiellen Energie angibt wie stark das Potential an einer Stelle gekrümmt ist.

$$\vec{F} = -\nabla V \quad (3.37)$$

Der Gradient  $\nabla$  ist wie gesagt gegeben durch:

$$\nabla V = \text{grad}(V) = \begin{pmatrix} \partial V / \partial x \\ \partial V / \partial y \\ \partial V / \partial z \end{pmatrix}$$

**3.2.14 Mechanische Gesamtenergie**

Wir haben schon folgende Beziehungen für die Arbeit, um von einem Punkt  $P_1$  zu einem Punkt  $P_2$  zu kommen, kennen gelernt.

$$A = T_2 - T_1$$

$$A = V_1 - V_2$$

Da wir von konservativen Kräften ausgehen, muss diese Arbeit immer gleich sein. Daher erhalten wir:

$$\begin{aligned} T_2 - T_1 &= V_1 - V_2 \\ T_1 + V_1 &= T_2 + V_2 \end{aligned}$$

Wegen diesem Zusammenhang macht es Sinn, die mechanische Gesamtenergie  $E$  einzuführen. Die in einem konservativen Kraftfeld erhalten bleibt.  $E$  ist definiert durch:

$$E = T + V \quad (3.38)$$

### Erhaltungsgrößen

Wir haben also in der Zwischenzeit folgende Erhaltungsgrößen kennen gelernt:

$\vec{p}$	Impuls
$\vec{L}$	Drehimpuls
MMP	Massenmittelpunkt
$E$	Gesamtenergie
$M$	Masse (zwar nie explizit gesagt, aber immer benutzt)

## 3.3 Kräfte und Kraftfelder

### 3.3.1 Arten von Wechselwirkungskräften

In der Natur gibt es 4 Wechselwirkungskräfte. Diese sind:

- Schwache Wechselwirkungskraft
- Starke Wechselwirkungskraft
- Elektromagnetische Wechselwirkung
- Gravitationskraft

Wir betrachten hier erstmal nur die Gravitationskraft genauer. Ausserdem betrachten wir diverse andere Kräfte, die mikroskopisch zwar durch die anderen Wechselwirkungskräften erklärt werden können, makroskopisch aber bestimmte Auswirkungen haben.

### 3.3.2 Arten von Kraftfeldern

#### Homogenes Kraftfeld

Kräfte wirken überall in der gleichen Richtung mit der gleichen Länge.

#### Zentralkräftefeld

Kräfte gehen von einem Punkt weg.

#### Statische Kräfte

Dies bedeutet, dass die Kräfte zeitunabhängig sind. Es gilt als:  $\frac{d\vec{F}}{dt} = 0$ .

#### Kraftausbreitung

Fernwirkung bedeutet, dass sich das Kraftfeld von einem Punkt aus ausbreitet, und dann an einem anderen Punkt die Kraft bewirkt.

### 3.3.3 Gravitationskraft

Die schwere Masse ist nicht gleich der trägen Masse. Wir bezeichnen folgend die schwere Masse mit  $m_s$  und die träge Masse mit  $m$ . Wir wollen als erstes den Zusammenhang zwischen der trägen und der schweren Masse untersuchen. Hierzu betrachten wir die Kraft  $\vec{G}$  die auf die schwere Masse  $m_s$  im homogenen Schwerefeld an der Erdoberfläche wirkt. Es gilt hier:

$$\begin{aligned}\vec{G} &= m_s \cdot \vec{g} \\ \vec{g} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix} \\ [\vec{g}] &= \left[ \frac{N}{kg} \right] \\ [\vec{G}] &= [N]\end{aligned}$$

Wir untersuchen den freien Fall an der Erdoberfläche. Für die Bewegungsgleichung folgt aus dem 2. Newtonschen Axiom:

$$\begin{aligned}m \cdot \ddot{\vec{r}} &= \vec{G} \\ m \cdot \frac{d^2 z}{dt^2} &= -m_s g \\ m \cdot \frac{dz}{dt} &= -m_s \cdot g \cdot t \\ m \cdot z &= -m_s \cdot g \cdot \frac{t^2}{2}\end{aligned}$$

Wir untersuchen experimentell, den Fall von einer fixen Fallhöhe, und messen die Fallzeit.

$$\begin{aligned}m \cdot H &= -m_s \cdot g \cdot \frac{t_H^2}{2} \\ t_H &= \sqrt{\frac{2m \cdot H}{m_s \cdot g}} \\ m_s &= \underbrace{\frac{2H}{g \cdot t_H^2}}_{\text{wahrscheinlich konstant} = c_s} \cdot m\end{aligned}$$

Wir bestimmen  $c_s$  für verschiedene Objekte, und sehen, dass jedes Mal das gleiche Ergebnis herauskommt. Um das Rechnen zu vereinfachen, definieren wir  $c_s = 1$ . Wodurch wir erhalten:

$$m_s = m \quad (3.39)$$

Aus diesem Grund sprechen wir desweiteren nur noch von der Masse.

### 3.3.4 Massenanziehung von Massenpunkten

Experimentell sehen wir an der Erdoberfläche, dass die Gravitationskraft proportional zur Masse des Körpers ist, also:

$$|\vec{F}| \propto m$$

Wegen dem dritten Newtonschen Axiom, dass die Kraft immer gleich der Gegenkraft ist, muss der auf die Erde fallende Körper, genau die gleiche Kraft auf die Erde ausüben. Also:

$$|\vec{F}| \propto M$$



Durch Beobachtung des Mondes, kann man die Zentripetalbeschleunigung berechnen, die die Erde auf den Mond ausüben muss. Aus deren Verhältnis zur Fallbeschleunigung auf der Erde und dem Verhältnis des Abstandes des Mondes zum Erdmittelpunkt und dem Erddurchmesser, kann man folgern:

$$|\vec{F}| \propto \frac{1}{r^2}$$

Die Richtung der Gravitationskraft erhalten wir durch, den Einheitsvektor des Abstandes, da die Kraft ja von einer Masse auf die andere wirkt. Ausserdem müssen wir noch eine konstante  $C_g$  berücksichtigen. Wir erhalten also für das Gravitationsgesetz:

$$\vec{F} = -C_g \frac{m \cdot M}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} \quad (3.40)$$

$C_g$  ist wie schon gesagt die Gravitationskonstante. Sie wurde erstmals von Cavendish mit seiner Drehwaage bestimmt. Für die Gravitationskonstante gilt:

$$C_g = 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg \cdot s^2}$$

#### Bestimmung der Masse der Erde

Mit den Kenntnissen der Gravitationskonstante und der Fallbeschleunigung, lässt sich sehr leicht die Erdmasse und ihre Dichte berechnen. Wir wissen, dass die Erde einen Radius  $R \approx 6370 km$  hat, und dass die Fallbeschleunigung  $g \approx 9.81 m \cdot s^{-2}$  ist. Also gilt:

$$M = \frac{g \cdot R^2}{C_g} \quad (3.41)$$

Wir erhalten also für die Erdmasse  $M \approx 5.97 \cdot 10^{24} kg$ . Und die Dichte erhalten wir aus  $\rho = M/V$ . Wir nehmen hier an, dass die Erde eine Kugel ist. Also ist  $V = 4/3 \pi R^3$ . Wir erhalten für die Dichte also  $\rho \approx 5.710^3 kg \cdot m^{-3}$ .

#### Potentielle Energie einer Masse

Wir wissen für die Potentielle Energie gilt:

$$\vec{F} = -\nabla V = - \left( \begin{array}{c} \frac{\partial V}{\partial x} \\ \frac{\partial V}{\partial y} \\ \frac{\partial V}{\partial z} \end{array} \right)$$

Wenn wir annehmen dass  $V \propto \frac{1}{r}$  ist, erhalten wir für  $V$ :

$$V = -C_g \frac{m \cdot M}{r} \quad (3.42)$$

#### 3.3.5 Mathematisches Pendel

Ein weiteres Beispiel für die Äquivalenz von schwerer Masse und träger Masse, ist das mathematische Pendel. Ein mathematisches Pendel ist ein Pendel bei dem die ganze Pendelmass in einem Massenpunkt vereinigt ist. Zur Betrachtung dieses Pendels verwenden wir folgende Größen.

$m_S$	Schwere Masse
$m_T$	Träge Masse
$l$	Länge der Pendelschnur
$x$	Auslenkung des Pendels

$$\begin{aligned}
\vec{F}_G &= m_S \cdot \vec{g} \\
\vec{F}_R &= m_S \cdot g \cdot \tan \varphi \\
\sin \phi &= \frac{x}{l} \\
\text{Bei kleinen Winkeln } \sin \varphi &\approx \tan \varphi \\
\vec{a} &= -\frac{\vec{F}_R}{m_T} \\
\vec{a} &= -\frac{m_S}{m_T} \cdot g \cdot \frac{x}{l}
\end{aligned}$$

Um diese Gleichung aufzulösen, verwenden wir als Lösungsansatz  $x = a \cdot \cos(\omega t)$ .

$$\begin{aligned}
x &= a \cdot \cos(\omega t) \\
\dot{x} &= -a \cdot \omega \cdot \sin(\omega t) \\
\ddot{x} &= -a \cdot \omega^2 \cdot \cos(\omega t) \\
-a \cdot \omega^2 \cdot \cos(\omega t) &= -a \cdot \cos(\omega t) \frac{m_S}{m_T} \frac{g}{l} \\
\omega^2 &= \frac{m_S}{m_T} \cdot \frac{g}{l}
\end{aligned}$$

Experimentell sehen wir, dass die Schwingungsdauer nicht von der Masse abhängt. Es ist also bestätigt, dass die träge äquivalent der schweren Masse ist. Wir erhalten also vereinfacht für die Winkelgeschwindigkeit:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}} \quad (3.43)$$

Die Schwingungsdauer  $T$ , kann einfach dadurch bestimmt werden. Das gilt  $2\pi = \omega \cdot T$ , und die Frequenz  $\mu = 1/T$ .

### 3.3.6 Keplersche Gesetze

1. Die Planeten rotieren auf Ellipsenbahnen, in deren einen Brennpunkt die Sonne steht.
2. Der Radiusvektor  $\vec{r}$  überschreitet in gleichen Zeiten, gleiche Flächen.  
Dies kann mit der Drehimpulserhaltung erklärt werden.

$$\begin{aligned}
\vec{N} &= 0 \\
\vec{L} &= \vec{r} \times \vec{p} \\
A &= |\vec{r} \times (\vec{v} \Delta t)| \\
&= \left| \vec{r} \times \left( \frac{\vec{p}}{m} \Delta t \right) \right| \\
A &= \frac{\Delta t}{m} \underbrace{|\vec{r} \times \vec{p}|}_{=\vec{L}} \\
A &= \frac{\Delta t}{m} \vec{L}
\end{aligned}$$

Wir sehen, dass die Fläche nur von der Zeit abhängt, weil sowohl die Masse eines Planeten als auch sein Drehimpuls erhalten bleiben.

3. Durch das 3. Kepler Gesetz werden die Umlaufzeiten von 2 Planeten:  $T_1, T_2$  in Relation mit den grossen Hauptachsen ihrer Ellipsen  $a_1, a_2$  gesetzt.

$$\frac{T_2^2}{T_1^2} = \frac{a_2^3}{a_1^3} \quad (3.44)$$

### 3.3.7 Molekulare Wechselwirkungskräfte

Wenn wir die Wechselwirkung zwischen 2 Molekülen mit Abstand  $x$  betrachten erhalten wir eine Potentialkurve von:

$$V(x) = a_0 + a_2 \cdot x^2 \dots \quad (3.45)$$

Wir sehen hier, dass das lineare Glied  $a_1$  fehlt. Die Kraft, die Moleküle mit einem Abstand  $x$ , aufeinander ausüben, erhalten wir mit dem Gradienten. Also:

$$\vec{F} = -\nabla V = -2a_2 \cdot x + \dots$$

Diese Kraft ist für kleine Abstände proportional zur Auslenkung. Ein solches System schwingt wie ein harmonischer Oszillator. Den wir deswegen genauer behandeln:

### 3.3.8 Harmonischer Oszillator

Ein harmonischer Oszillator ist Objekt bei dem die Kraft bei einer Auslenkung  $x$  immer zurück zur Ruhelage wirkt. Es gilt:

$$F_x = -k \cdot x \quad (3.46)$$

$k$  ist hier die Rückstellkonstante. Diese Relation ist äquivalent zu:

$$m \cdot \ddot{x} = -k \cdot x$$

Um die Bewegungsgleichung zu lösen verwenden wir einen komplexen Lösungsansatz, unter Verwendung der eulerschen Relation.

$$\begin{aligned} e^{i \cdot \varphi} &= \cos \varphi + i \sin \varphi \\ x &= A e^{i \omega t} \\ \dot{x} &= A i \omega e^{i \omega t} \\ \ddot{x} &= -A \omega^2 e^{i \omega t} \\ m \cdot \ddot{x} &= -k \cdot x \\ -m \omega^2 e^{i \omega t} &= -k e^{i \omega t} \\ m \omega^2 &= k \end{aligned}$$

Wir erhalten also für die Winkelgeschwindigkeit  $\omega$ :

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (3.47)$$

Die Schwingungsdauer  $T$  ist die Zeit, die ein Oszillator für eine volle Periode braucht. Also muss gelten:  $\omega \cdot T = 2\pi$ . Daraus folgt:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \quad (3.48)$$

Und für die Frequenz  $\nu$ , also der Anzahl von Schwingungen pro Sekunde.

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (3.49)$$

## 3.4 Bezugssystem

Wir nehmen an, dass wir Karthesische Koordinaten verwenden, und dass das Bezugssystem  $S$  ein Inertialsystem ist. Wir betrachten die Bezugssysteme  $S : 0, \hat{e}_x, \hat{e}_y, \hat{e}_z$ , und das Bezugssystem  $S^* : 0^*, \hat{e}^*_x, \hat{e}^*_y, \hat{e}^*_z$

Wir betrachten die Translation und die Rotation getrennt.

### 3.4.1 Translation

Wir nehmen hier an, dass die Basisvektoren der Beidenkoordinatensysteme gleich sind. Wir unterscheiden hier 2 wesentliche Fälle.

#### Gleichförmig bewegte Bezugssysteme

Wenn  $S^*$  relativ zu  $S$  gleichförmig bewegt ist, und beim Zeitpunkt  $t = 0 = 0^*$  war, und deswegen die Bewegungsgleichung für  $0^* = \vec{u} \cdot t$  ist, gilt die Galilei-Transformation:

$$\vec{r}^* = \vec{r} + \vec{u} \cdot t \quad (3.50)$$

$$t^* = t \quad (3.51)$$

Hierbei ist  $\vec{r}^*$  der Ortsvektor im bewegten Bezugssystem ist, und  $\vec{u}$  die relativ Geschwindigkeit von  $S^*$  zu  $S$ . Wenn wir jetzt das Verhältnis von den Geschwindigkeiten und Beschleunigungen in den 2 Systemen betrachten:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{r}^*}{dt} &= \frac{d\vec{r}}{dt} - \vec{u} \\ \frac{d^2\vec{r}^*}{dt^2} &= \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \end{aligned}$$

Wir sehen, dass die Beschleunigungen in  $S$  und  $S^*$  gleich sind. Hierdraus folgt, dass auch die Kräfte in beiden Bezugssystemen gleich sind. Also ist  $S^*$  auch ein Inertialsystem.

#### Gleichförmig beschleunigte Bezugssysteme

Für den Nullpunkt  $0^*$  von  $S^*$  gilt die Bewegungsgleichung:  $0^* = \vec{u} \cdot t + \vec{a} \frac{t^2}{2}$ . Es folgt daraus folgende Transformation:

$$\vec{r}^* = \vec{r} - \vec{a} \cdot t - \vec{a} \frac{t^2}{2} \quad (3.52)$$

$$t^* = t \quad (3.53)$$

Man sieht durch ableiten des Ortsvektors, dass sich die Beschleunigung im beschleunigten Bezugssystem ändert. Aus dem beschleunigten Bezugssystem  $S^*$  heraus wiederfährt einem im Inertialsystem  $S$  ruhendem Punkt die Beschleunigung  $\vec{a}$ . Also wird auf diesen Punkt auch eine Kraft ausgeübt. Dies ist eine **Trägheitskraft**. Für dieses gilt:

$$\vec{F}_T = -m \cdot \vec{a} \quad (3.54)$$

Diese ist keine eingeprägte Kraft (Kraft die in einem Inertialsystem wirkt.)

Genauso braucht man, um einen Punkt im Bezugssystem  $S^*$  unbeschleunigt zu halten eine **Führungskraft**. Dies ist die eingeprägte Kraft, die im Inertialsystem nötig ist, um den Punkt zu beschleunigen. Die Führungskraft ist gegeben durch:

$$\vec{F}_F = m \cdot \vec{a} \quad (3.55)$$

### 3.4.2 Rotation

Um die Betrachtung des rotierenden Systems zu vereinfachen. Legen wir  $0^*$  in  $0$ , ausserdem wählen wir diese beiden Punkte so, dass sie auf der Drehachse  $\vec{\omega}$  liegen.

**Hier fehlt Freak Mathematik**

Wir definieren folgende Grössen:

$\vec{\omega}$  Winkelgeschwindigkeit von  $S^*$

$\vec{v}$  Geschwindigkeit von einem Massenpunkt relativ zu  $S$

$\vec{v}_{rel}$  Geschwindigkeit von einem Massenpunkt relativ zu  $S^*$

Wenn ein Massenpunkt in  $S^*$  ruht, beobachtet ihn ein Beobachter aus  $S$  mit der Geschwindigkeit  $\vec{v}$ , gegeben durch:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} \quad (3.56)$$

Wenn man aus  $S^*$  einen bezüglich  $S$  unbeschleunigten Massenpunkt betrachtet beobachtet man folgende Trägheitskräfte:

**Corioliskraft**

Dies ist eine seitliche Ablenkung. Sie verändert die Bewegungsrichtung:

$$\vec{F}_C = -2m\vec{\omega} \times \vec{v}_{rel} \quad (3.57)$$

**Zentrifugalkraft**

Diese schaut von der Drehachse weg.

$$\vec{F}_{ZF} = -m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \quad (3.58)$$

Wenn man aus dem System  $S$  einen im System  $S^*$  unbeschleunigten Massenpunkt beobachtet, sind eingeprägte Kräfte notwendig. Diese sind Führungskräfte. Sie sind gegeben durch:

$$\begin{aligned} 2m \cdot \vec{\omega} \times \vec{v}_{rel} \\ \vec{F}_{ZP} = m \cdot \vec{\omega}(\vec{\omega} \times \vec{r}) \end{aligned}$$

Die zweite wird Zentripetalkraft genannt, und kompensiert die Zentrifugalkraft. Die erste hat keinen Namen, dient aber dazu die Corioliskraft zu kompensieren.

**3.5 Stoss und Streuung**

Als Stoss- und Streuvorgang bezeichnen wir alle Vorgänge, bei denen zwei Teilchen kurz in Wechselwirkung treten. Wir nehmen hier an, dass sie in einem Inertialsystem passieren, und dass wir nur ein einfallendes Teilchen (1) und ein Targetteilchen (2) betrachten. Um einen solchen Vorgang zu beschreiben, verwenden wir folgende Grössen:

Bezeichnung	Beschreibung
$m_1$	Masse des einfallenden Teilchens
$m_2$	Masse des Targetteilchens
$\vec{r}_1, \vec{r}_2$	Orte der beiden Teilchen
$\vec{v}_1 = \dot{\vec{r}}_1$	Geschwindigkeit des einfallenden Teilchens
$\vec{v}_1'$	Geschwindigkeit des einfallenden Teilchens vor dem Stoss
$\vec{v}_1''$	Geschwindigkeit des einfallenden Teilchens nach dem Stoss
$\vec{v}_2 = \dot{\vec{r}}_2$	Geschwindigkeit des Targetteilchens
$\vec{R} = \frac{m_1 \cdot \vec{r}_1 + m_2 \cdot \vec{r}_2}{m_1 + m_2}$	Massenmittelpunkt des Systems
$\vec{V} = \dot{\vec{R}}$	Geschwindigkeit des Massenmittelpunkts.
$\vartheta_1 = \angle \vec{v}_1', \vec{v}_1''$	Steuwinkel
$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$	Reduzierte Masse
$\vec{r}_{12} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$	Relativvektor
$\vec{v}_{12} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$	Relativgeschwindigkeit

### 3.5.1 Massenmittelpunkt- oder Schwerpunktsystem

Bei dem Massenmittelpunktsystem setzen wir die Geschwindigkeit des Massenmittelpunktes  $\vec{V}$  gleich Null. Hierdurch ruht der Massenmittelpunkt. Dies bewirkt, dass die Geschwindigkeitsvektoren der beiden Teilchen vor und nach dem Stoss parallel zueinander sind. Den Abstand der Bewegungsgeraden vor dem Stoss bezeichnen wir als Stossparameter  $b$ . Ausserdem folgt aus dieser Parallelität, dass die beiden Streuungswinkel  $\vartheta_1$  und  $\vartheta_2$  gleich sind. Aus diesem Grund bezeichnen wir den Streuungswinkel im Massenmittelpunktsystem mit  $\Theta$ .

Der Relativvektor  $\vec{r}_{12}$  hat ausserdem die Eigenschaft immer durch den Massenmittelpunkt  $\vec{R}$  zu gehen.

### 3.5.2 Laborsystem

Bei dem Laborsystem wird das Targetteilchen als ruhend angenommen. Für sehr grossen Massen des Targetteilchens wird das Laborsystem gleich dem Schwerpunktsystems.

Bei konservativen Wechselwirkungskräften gilt die klassische Transformationsformel für den Streuungswinkel:

$$\tan(\vartheta_1)_L = \frac{\sin \Theta}{\cos \Theta + \frac{m_1}{m_2}} \quad (3.59)$$

### 3.5.3 Grundgleichungen

Um den Streuvorgang zu beschreiben, lassen sich die Erhaltungssätze die wir schon kennengelernt haben anwenden. Den Impulserhaltungssatz:

$$\vec{p}_1'' + \vec{p}_2'' = \vec{p}_1' + \vec{p}_2' \quad (3.60)$$

Und der Energieerhaltungssatz:

$$\frac{(\vec{p}_1'')^2}{2m_1} + \frac{(\vec{p}_2'')^2}{2m_2} = \frac{(\vec{p}_1')^2}{2m_1} + \frac{(\vec{p}_2')^2}{2m_2} + Q \quad (3.61)$$

Der hier neu auftretende Faktor  $Q$ , beschreibt den Energieverlust. Man unterscheidet je nach Grösse von  $Q$  3 Arten von Stössen:

$Q = 0$  Elastischer Stoss

$Q < 0$  Inelastischer Stoss      Ausserdem gibt es noch Reaktive Stösse, bei denen neue Teilchen

$Q > 0$  Superelastischer Stoss

oder Antiteilchen entstehen. Diese gibt es aber nur bei atomaren Vorgängen.

### 3.5.4 Dynamik der Streuung

#### Potentialstreuung

Wir reduzieren hier das Problem auf ein 1-Körperproblem. Es gelten die folgenden Formeln:

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2} \\ \mu \cdot \frac{d^2 \vec{r}_{12}}{dt^2} &= \vec{F}_{21}(\text{Zentralkraft}) \end{aligned}$$

Die Potentialstreuung kann ins Massenmittelpunktsystem übertragen werden. Hierbei geht  $\vec{r}_{12}$  durch den Massenmittelpunkt, und wird von diesem im Verhältnis der Massen geteilt.

Wenn die Teilchen die gleiche Masse haben teilt der Massenmittelpunkt den Relativvektor in der Hälfte. Wenn die Targetmasse deutlich grösser ist als die des einfallenden Teilchens, fallen die beiden Darstellungen zusammen.

### Ablenkfunktion

Die Ablenkfunktion beschreibt die Abhängigkeit des Streuwinkels  $\Theta$  von dem Stossparameter  $b$ .

### 3.5.5 Streuung von Teilchenstrahlen

Hier wird eine grosse Anzahl aufeinander folgender Streuvorgänge betrachtet. Im allgemeinen kann man jeden dieser einzeln betrachten. Mit  $I$  bezeichnen wir die Anzahl der einfallenden Teilchen, und mit  $\Phi$  den gestreuten Fluss. Dies ist die Anzahl der Teilchen die abgelenkt worden. Es gilt:

$$\Phi = \sigma_{total} I \quad (3.62)$$

$\sigma$  ist hier der (totale) Wirkungsquerschnitt. Dieser gibt an, welcher Anteil von Teilchen in eine bestimmte Richtung gestreut werden.

## 3.6 Mechanik des starren Körpers

Als starren Körper bezeichnen wir jeden Körper, der nicht deformierbar ist. Wir betrachten das Verhalten eines starren Körpers unter dem Einfluss von äußeren Kräften. Für einen starren Körper gilt, dass er 6 Freiheitsgrade hat (3 der Rotation und 3 der Translation). Außerdem besteht ein starrer Körper aus  $N$  Teilchen. Um ihn zu betrachten verwenden wir folgende Eigenschaften:

Bezeichnung	Beschreibung
$\vec{r}_i$	Position des i-ten Teilchens
$m_i$	Masse des i-ten Teilchens
$V$	Gesamtvolumen des Körpers
$M = \sum_i m_i$	Masse des Körpers
$M = \int_V dm$	Auch die Masse des Körpers. $dm$ stellt ein Volumselement da

### 3.6.1 Statik

Die Statik beschäftigt sich mit ruhenden starren Körpern. Auf diesen Körper wirkt ein System von Kräften  $\vec{F}_i$ . Jede dieser Kräfte hat einen Angriffspunkt  $\vec{r}_i$  am Körper. Jede Kraft bewirkt bezüglich eines Punktes B mit Position  $\vec{r}_B$  ein Drehmoment  $\vec{N}_{Bi}$  gegeben durch:

$$\vec{N}_{Bi} = (\vec{r}_i - \vec{r}_B) \times \vec{F}_i \quad (3.63)$$

Hieraus sehen wir, dass eine Kraft gleichwertig einem Drehmoment ist. Wir suchen einen Punkt B für den alle Kräfte sowie das Drehmoment verschwinden würde. Hierzu brauchen wir die Gesamtkraft  $\vec{F}$ :

$$\begin{aligned} \vec{F} &= \sum_i \vec{F}_i \\ \vec{N}_B = \sum_i \vec{N}_{Bi} &= \sum_i (\vec{r}_i - \vec{r}_B) \times \vec{F}_i \\ \vec{N}_B &= \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i - \vec{r}_B \times \vec{F} \end{aligned}$$

Wenn  $\vec{F} \neq 0$  ist, kann man einen Bezugspunkt B so wählen. Dass alle Kräfte gleichwertig zu der Kraft  $\vec{F}$  sind, und es keinen Drehmoment  $\vec{N}_B$  gibt.

### Drehmomente im Erdschwerefeld

Wir nehmen an, dass wir einen Körper haben, der sich im Erdschwerefeld befindet. Die Frage ist nun, an welchem Punkt man diesen Körper unterstützen muss, damit er ruht.

$$\begin{aligned}\vec{F}_i &= m_i \cdot \vec{g} \\ \vec{N}_B &= \sum_i \vec{r}_i \times (m_i \cdot \vec{g}) - \vec{R}_B \times \underbrace{\sum_i m_i \vec{g}}_{\vec{F}} = 0 \\ \sum_i \vec{r}_i \times (m_i \cdot \vec{g}) &= \vec{R}_B \times \underbrace{\sum_i m_i \vec{g}}_{\vec{F}}\end{aligned}$$

Da das Erdschwerefeld homogen ist, ist  $\vec{g}$  überall konstant.

$$\begin{aligned}\sum_i (m_i \cdot \vec{r}_i) \times \vec{g} &= (M \cdot \vec{R}_B) \times \vec{g} \\ \vec{R}_B &= \frac{\sum_i m_i \cdot \vec{r}_i}{\sum_i m_i}\end{aligned}$$

Dies ist der Schwerpunkt.

### 3.6.2 Dynamik

Die Translation eines starren Körpers reduziert sich auf die Bewegung eines Massenpunktes. Es gilt die Bewegungsgleichung:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \quad (3.64)$$

Wir betrachten hier deswegen die Rotation von starren Punkten. Wir können zwar die Bewegungsgleichung auch in der einfachen Form:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{N} \quad (3.65)$$

Allerdings ist der Zusammenhang zwischen dem Drehimpuls  $\vec{L}$  und der Winkelgeschwindigkeit  $\vec{\omega}$  deutlich komplizierter. Der Drehimpuls eines einzelnen Punktes ist gegeben durch:

$$\begin{aligned}\vec{L}_i &= \vec{r}_i \times \vec{p}_i \\ \vec{p}_i &= \vec{\omega} \times \vec{r}_i \\ \vec{L} &= \int_V \vec{r}_i \times (\vec{r}_i \times \vec{\omega}) dm\end{aligned}$$

Die letzte Formel beschreibt, den Gesamtdrehmoment des starren Körpers. Dieses Integral können wir durch den Trägheitstensor  $I$  ausdrücken. Mit diesem erhalten wir den Zusammenhang:

$$\vec{L} = I\vec{\omega} \quad (3.66)$$



Der Trägheitstensor  $I$  ist gegeben durch:

$$\begin{aligned}
 I &= \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{pmatrix} \\
 I_{11} &= \int_V (x_2^2 + x_3^2) dm \\
 I_{22} &= \int_V (x_1^2 + x_3^2) dm \\
 I_{33} &= \int_V (x_1^2 + x_2^2) dm \\
 I_{12} = I_{21} &= \int_V (x_1 \cdot x_2) dm \\
 I_{13} = I_{31} &= \int_V (x_1 \cdot x_3) dm \\
 I_{23} = I_{32} &= \int_V (x_2 \cdot x_3) dm
 \end{aligned}$$

Die kinetische Energie eines rotierenden starren Körpers kann durch folgende Formel berechnet werden:

$$T = \frac{1}{2} I_{ij} \cdot \omega_i \cdot \omega_j \quad (3.67)$$

### 3.6.3 Rotation um eine feste Achse

Hier nehmen wir beispielsweise die  $x_3$ -Achse. Man erhält also für die Winkelgeschwindigkeit  $\vec{\omega} = (0; 0; \omega)$ . Damit reduziert sich der interessante Teil des Trägheitstensor auf  $I_{33}$ . Wir können dies mit der Formel  $I_{33} = \int_V (x_1^2 + x_2^2) dm$  berechnen.  $x_1^2 + x_2^2$  ist hier äquivalent zum Abstand des Punktes von der Drehachse. Wir erhalten also die vereinfachte Formel:

$$I_{33} = \int_V d^2 dm \quad (3.68)$$

Damit das Ganze ein bisschen klarer wird, ein paar Beispiele:

#### Homogener Zylinder

Wir betrachten einen homogenen Zylinder mit der Höhe  $h$  und dem Radius  $R$ . Wir nehmen als Drehachse den Mittelpunkt des Zylinders, also die Achse des Zylinders.

$$\begin{aligned}
 M = \rho \cdot V &= \rho \cdot R^2 \cdot \pi \cdot h \\
 dV &= 2\pi r \cdot h \cdot dr \\
 dm &= \rho dV \\
 I_{33} &= \int_V r^2 \cdot dm = \rho \int_V r^2 dV = \rho \cdot 2\pi h \int_0^R r^3 dr = 2\pi h \rho \cdot \frac{R^4}{4} \\
 I_{33} &= \frac{1}{2} \cdot M \cdot R^2
 \end{aligned}$$

#### Parallele Verschiebung der Drehachse

##### Satz von Steiner

$$I_{33} = (I_{33})_S + M \cdot A^2 \quad (3.69)$$

Hierbei ist  $A$  der Abstand von den beiden Drehachsen.

### 3.6.4 Harmonischer Oszillator der Drehung

Hierbei wirkt ein Drehmoment  $\vec{N}$ , dass von der Auslenkung des Oszillators  $\varphi$  mit der Richtkonstante  $k_\varphi$  zusammenhängt. Wir betrachten hier nur eine Oszillation um die dritte Hauptachse. Dieser Zusammenhang ist gegen durch:

$$N_3 = -k_\varphi \cdot \varphi \quad (3.70)$$

Durch Lösen der Bewegungsgleichung der Drehbewegung, erhalten wir für die Schwingungsdauer  $T$  des Drehoszillators:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I_{33}}{k_\varphi}} \quad (3.71)$$

Dieser Zusammenhang kann verwendet werden, um den Drehmoment eines Körpers zu bestimmen, indem man ihn mit einem Anderen mit bekannten Drehmoment vergleicht. Hierzu verwendet man einen Drehteller, der oszilliert. Auf diesen stellt man dann die Körper deren Drehmoment man bestimmen will, und vergleicht die Schwingungsdauern.

### 3.6.5 Vergleich Rotation Translation

Translation		Rotation	
Länge	s	Winkel	$\varphi$
Masse	m	Trägheits-Tensor	$I_{ij}$
Geschwindigkeit	$\vec{v}$	Winkelgeschwindigkeit	$\vec{\omega}$
Impuls	$\vec{p} = m \cdot \vec{v}$	Drehimpuls	$L_i = I_{ij} \cdot \omega_j$
Kraft	$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$	Drehmoment	$\vec{N} = \frac{d\vec{L}}{dt}$
Kinetische Energie	$T = \frac{1}{2}mv^2$	Kinetische Energie	$T = \frac{1}{2}I_{ij}\omega_i\omega_j$
Rückstellkraft	$F_x = -k \cdot x$	Rückstellmoment	$N_3 = -k_\varphi \cdot \varphi$
Schwingungsdauer	$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$	Schwingungsdauer	$T = 2\pi\sqrt{\frac{I_{33}}{k_\varphi}}$

### 3.6.6 Rotation um freie Achsen

Wenn wir einen rotierenden Körper mit komplizierteren Trägheitstensor betrachten, ist es sinnvoll mit körperfesten Koordinaten zu rechnen. Dies bedeutet das Koordinatensystem dreht sich mit dem Körper mit. Da  $I$  reell und symmetrisch ist, ist man in der Lage  $I$  zu diagonalisieren. Man erhält für  $I$ :

$$I_{ij} = \begin{pmatrix} I_A & 0 & 0 \\ 0 & I_B & 0 \\ 0 & 0 & I_C \end{pmatrix}$$

Wir transformieren dies ausserdem so, dass gilt:  $I_A \leq I_B \leq I_C$ .

$$\begin{array}{ll} I_A = I_B = I_C & \text{Kugelkreisel} \\ I_A = I_B & \text{Symmetrischer Kreisel} \\ I_A \neq I_B \neq I_C & \text{Unsymmetrischer Kreisel} \end{array}$$

### 3.6.7 Symmetrischer Kreisel

Um einen Symmetrischen Kreisel zu beschreiben sind 3 Achsen wichtig:

- $\vec{L}$ -Achse: Drehimpuls-Achse (Diese ist raumfest bei  $\vec{N}$ ).
- $\vec{\omega}$ : Drehachse (ist nicht raumfest, da sie bei der Drehung verändert, sowohl im Raum als auch im Körper)
- Figurenachse die Hauptträgheitsachse, in der der Körper symmetrisch ist.

**Nutation**

Bei  $\vec{N} = 0$ . Hier ist der Winkel zwischen der Figurenachse und der Drehimpulsachse und der Winkel zwischen der Figurenachse und der Drehachse konstant. Man kann sich die Bewegung als 2 Kegel vorstellen. Die Drehachse beschreibt um die Drehimpulsachse den Restpolkegel, und die Figurenachse rollt sich als Gangpolkegel dargestellt an diesem entlang.

**Präzession**

Wenn Drehimpuls-Achse, Drehachse und Figurenachse parallel sind. Dies ist eigentlich der Fall, bei dem ein Kreisel einfach, um seine Achse rotiert. Allerdings wirkt bei der Präzession ein konstantes Drehmoment. Dies ist bei einem Kreisel auf der Erde zum Beispiel die Gravitationsanziehung. Deswegen beschreibt, der Kreisel noch einen zusätzlichen Kegel. Die Winkelgeschwindigkeit der Präzession  $\Omega$  ist für einen Drehmoment bewirkt durch die Erdanziehungskraft bei einer Länge der Drehmomentachse  $\vec{r}$ :

$$\begin{aligned}\vec{N} &= \vec{r} \times (m\vec{g}) = rmgs\sin\alpha \\ d\varphi &= \frac{N \cdot dt}{L \cdot \sin\alpha} \\ \Omega &= \frac{d\varphi}{dt} = \frac{N}{L \sin\alpha} = \frac{m \cdot g \cdot r \sin\alpha}{L \sin\alpha} \\ \Omega &= \frac{mg \cdot r}{L}\end{aligned}\tag{3.72}$$

**3.7 Mechanisch deformierbare Körper****3.7.1 Fluide (Flüssigkeiten und Gase)**

Sie haben keine feste Gestalt.

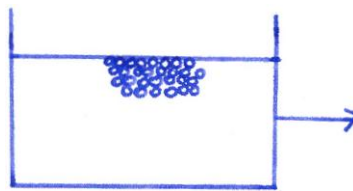
**3.7.2 Oberflächen von Flüssigkeiten**

Abbildung 3.1: Vergrößerung der Oberfläche einer Flüssigkeit

Die Oberflächenspannung beschreibt die Grenzenergie einer Flüssigkeit. Sie entsteht durch die unterschiedlichen Anziehungen der Moleküle in der Flüssigkeit und der Moleküle oberhalb der Flüssigkeit.

Zur Vergrößerung der Oberfläche einer Flüssigkeit um  $\Delta A$ , muss die Arbeit  $\Delta W$  gegen die Kraft auf die Moleküle an der Oberfläche aufgewendet werden. Den Zusammenhang zwischen den beiden Größen beschreibt  $\sigma$  die Oberflächenspannung.

$\sigma$  ... Oberflächenspannung

$$\Delta W = \sigma \cdot \Delta A\tag{3.73}$$

$$[\sigma] = \left[ \frac{Nm}{m^2} \right] = \left[ \frac{N}{m} \right]$$

Die Kraft  $F$  wirkt gegen die Oberflächenspannung. Bei unserem Experiment war dies die Schwer-

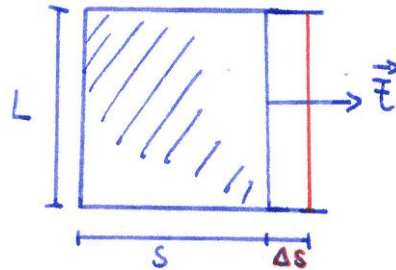


Abbildung 3.2: Vergrößerung der Oberfläche am Beispiel einer Seifenblase

kraft.

$$\begin{aligned}\Delta W &= F \cdot \Delta s \\ \Delta A &= 2\Delta s \cdot L \\ \Delta W &= \sigma \cdot 2(\text{Oberflächen}) \cdot \Delta s \cdot L \\ F \cdot \Delta s &= 2 \cdot \sigma \cdot L \cdot \Delta s \\ \Rightarrow \sigma &= \frac{F}{2L}\end{aligned}\tag{3.74}$$

### 3.7.3 Kapillarität

Bei der Beschreibung der Kapillarität gehen wir davon aus, dass die Wände des Gefäßes ganz benetzt sind. Also reduziert sich die Oberfläche der Flüssigkeit, wenn sie hochsteigt.

Weitere Hebung um  $\Delta h$

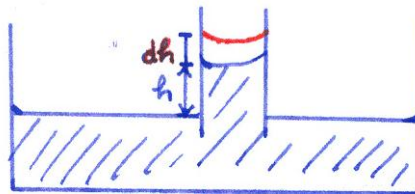


Abbildung 3.3: Kapillarität

- Verjüngung der benetzten Oberfläche um  $2\pi r \cdot \Delta h$   
 $\Rightarrow$  Energiegewinn  $2\pi r \sigma \cdot \Delta h$
- Arbeit für Hebung  
 $mg\Delta h = r^2\pi h\rho g\Delta h$

### 3.7.4 Ruhende Flüssigkeiten - Hydrostatik

Wir betrachten hier als wichtige Grösse den statischen Druck  $p$ . Der Druck ist in einer Flüssigkeit homogen und isotrop. Er ist gegeben durch:

$$p = \frac{F}{A} \quad (3.75)$$

$$\left[ \frac{N}{m^2} \right] = [Pa] \quad (3.76)$$

#### Druck in Flüssigkeiten

Eine Flüssigkeit ist inkompressibel. Dass bedeutet die Dichte  $\rho$  ist konstanten. Wir betrachten eine Flüssigkeitssäule. Das Volumen verändert sich mit der Tiefe  $t$ , um  $dv = A \cdot dt$ . Hierbei verändert sich der Druck von  $p$  auf  $p + dp$ . Wir wissen das für das Gewicht  $dm$  eines Volumenelementes gilt:  $dm = \rho \cdot dv \cdot g$ . Also gilt für die Druckänderung:

$$\begin{aligned} dp &= \frac{\rho \cdot g \cdot dv}{A} \\ dp &= \frac{\rho \cdot g \cdot A \cdot dt}{A} \\ dp &= \rho \cdot g \cdot dt \end{aligned} \quad (3.77)$$

Für den Druck in abhängigkeit von der Tiefe  $t$  gilt:

$$p(t) = p_0 + \rho \cdot g \cdot t \quad (3.78)$$

Hierbei ist  $p_0$  der Druck, der an der Oberfläche der Flüssigkeit wirkt. Wir sehen an dieser Formel, dass der Druck nur von der Tiefe abhängig ist. Dies führt zu paradoxen Situationen, wo man ein Gefäss mit einer kleinen Oberfläche und eins mit einer grossen hat, aber bei beiden wirkt der gleiche Druck am Boden.

#### Auftrieb

Wenn wir einen Quader mit Höhe  $H$  und Fläche  $A$  in eine Flüssigkeit eintauchen, wirkt an seiner Unterseite die Kraft  $F_U$  und an seiner Oberseite die Kraft  $F_O$ .

$$\begin{aligned} F_U &= (p_0 + \rho \cdot g \cdot (t + H))A \\ F_O &= (p_0 + \rho \cdot g \cdot (t))A \end{aligned}$$

Wenn wir diese beiden von einander subtrahieren erhalten wir die Auftriebskraft  $F_{Auf}$ .

$$F_{Auf} = F_U - F_O = \rho \cdot g \cdot \underbrace{H \cdot A}_V = M \cdot g \quad (3.79)$$

Hierbei bezeichnet das  $M$  die Masse der verdrängten Flüssigkeit. Dies führt zum Archimedischen Prinzip: „Ein eingetauchter Körper ist, um das Gewicht der von ihm verdrängten Flüssigkeit leichter“.

#### Schweredruck in Gasen

In Gasen ist die Dichte vom Druck abhängig. Es gilt laut dem Gesetz von Boyle-Mariotte (genauer in der Thermodynamik behandelt):  $p \cdot V = const.$ . Da wir wissen, dass die Masse konstant ist und die Dichte gegeben ist durch  $\rho = \frac{M}{V}$ , können wir diese Formel zu  $\frac{p}{\rho} = const$  umformen. Hiermit erhalten wir für die Dichte bei einem bestimmten Druck in Abhängigkeit einer bekannten Dichte und Drucks am Nullpunkt:

$$\rho = \frac{\rho_0}{p_0} \cdot p \quad (3.80)$$

Durch umformen erhalten wir dann die Barometrische Höhenformel:

$$p = p_0 \cdot e^{-\frac{\rho_0}{p_0} \cdot g \cdot h} \quad (3.81)$$

### 3.7.5 Strömungen in Fluiden

$\vec{v}$  ... Geschwindigkeitsfeld

$p$  ... Druckfeld

$\rho$  ... Dichtefeld

( $T$  ... Temperaturfeld)

Bezeichnungen

- Stromlinie  
Tangentallinien an Geschwindigkeitsvektoren
- Stromfaden: die Summe aller Stromlinien, die von einem Ring ausgehen.
- Bahnkurve: Stromlinie für stationäre Strömungen. Im allgemeinen der Weg eines Flüssigkeitselementes.

#### Volumsfluß

Der Volumsfluss beschreibt, das Volumen, das pro Zeiteinheit durch eine Fläche geht.

$$\Phi_V = \iint_A \vec{v} \cdot d\vec{f} \quad (3.82)$$

$d\vec{f}$  ist der Flächenvektor der durchströmten Fläche

#### Massefluß

Der Massefluss beschreibt, die Masse, die pro Zeiteinheit durch eine Fläche strömt.

$$\Phi_m = \iint_A \rho \cdot \vec{v} \cdot d\vec{f} \quad (3.83)$$

$$\text{Fluidstromdichte: } \vec{j} = \rho \cdot \vec{v} \quad (3.84)$$

#### Einteilung der Fluide

- inkompressibel / kompressibel:  
Flüssigkeiten sind in guter Näherung inkompressibel. Gase sind hingegen kompressibel.
- reibungsfrei / zäh: (Angabe durch die Viskosität)

#### Einteilung der Strömungsformen

- stationär / nicht stationär: (stationär  $\rightarrow$  zeitlich konst. Strömungsbild)  
Bei einer stationären Flüssigkeit ist der Geschwindigkeitsvektor an einem Raumpunkt von der Zeit unabhängig.
- wirbelfrei / Wirbelströmung
- laminar / turbulent  
Laminar bedeutet, dass nebeneinander herlaufende Stromfäden individuell erhalten bleiben und sich nicht durchmischen.
- isotherm / nicht isotherm

**Masseerhaltung**

Aus Erfahrung wissen wir, dass die Masse erhalten bleibt.

Betrachtung: Volumen  $V$  in der Strömung.

Masse in dem Volumen  $V$ :

$$M = \int_V \rho dV \quad (3.85)$$

Masse, die pro Zeiteinheit aus  $V$  herausfließt:

$$\begin{aligned} \Phi_m &= \int_{\text{Rand}(V)} \rho \cdot \vec{v} \cdot d\vec{f} = \int_V \text{div}(\rho \vec{v}) \cdot dv \\ \text{Masseerhaltung: } \Rightarrow \frac{dm}{dt} &= -\Phi_m \\ \Rightarrow \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dv &= - \int_V \text{div}(\rho \vec{v}) dv \end{aligned}$$

Da diese Beziehung für jedes beliebige Volumen gelten muss, also auch für ganz kleine.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\text{div}(\rho \vec{v})$$

$$\text{Kontinuitätsgleichung: } \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0 \quad (3.86)$$

Für kleines Volumen  $\Delta v$  ( $\rho \vec{v} = \vec{j}$ )

$$\begin{aligned} \Phi_m &= \oint_{\text{Rand}(v)} \vec{j} \cdot d\vec{f} \\ \text{Mit Gauß: } &= \int \text{div}(\vec{j}) \cdot dv \\ &\approx \text{div}(\vec{j}) \cdot \underbrace{\int_{\Delta V} dv}_{\Delta V} \end{aligned}$$

Die Divergenz ist der Fluss aus dem Volumen pro Volumseinheit. Diese wird hier als Quelldichte bezeichnet.

$$\text{Quelldichte: } \frac{1}{\Delta V} \oint \vec{j} \cdot d\vec{f} = \text{div}(\vec{j}) \quad (3.87)$$

$$\text{Für inkompressible Fluide: } \text{div}(\vec{j}) = 0 \quad (3.88)$$

**Stationäre Strömungen**

Betrachtung: reibungsfreie, inkompressible Fluide.

In diesem betrachten wir einen einzelnen Stromfaden in der Strömung. Unter Einfluss der Drücke  $p_1, p_2$  wird das Volumen zwischen  $a, a'$  und  $b, b'$  verschoben. Wegen der Inkompressibilität bleibt das Volumen gleich. Genauso bleibt, dass Volumen zwischen  $b$  und  $a'$  konstant. Deswegen betrachten wir, dass das Volumen  $ab$  nach  $a'b'$  verschoben wird.

$$\text{Dichte } \rho = \text{const.} \Rightarrow \text{Volumen}(a, b) = \text{Volumen}(a', b') = dV \quad (3.89)$$

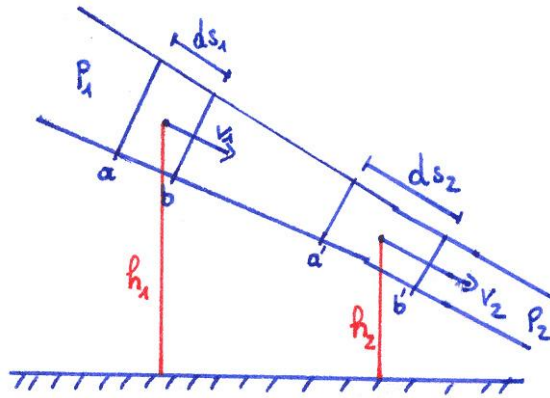


Abbildung 3.4: Verjüngung einer Strömung

$$\begin{aligned}
 \text{Zunahme der kin. Energie:} & \quad \frac{\rho \cdot dV \cdot v_2^2}{2} - \frac{\rho \cdot dV \cdot v_1^2}{2} \\
 \text{Zunahme der pot. Energie:} & \quad \rho \cdot dV \cdot g \cdot h_2 - \rho \cdot dV \cdot g \cdot h_1 \\
 \text{Zugeführte Druckarbeit:} & \quad p_1 \cdot \underbrace{A_1 \cdot ds_1}_{dV} - p_2 \cdot \underbrace{A_2 \cdot ds_2}_{dV}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\rho \cdot dV}{2} \cdot (v_2^2 - v_1^2) + \rho \cdot dV \cdot g(h_2 - h_1) &= dV(p_1 - p_2) \\
 \frac{\rho v_2^2}{2} + \rho \cdot g \cdot h_2 + p_2 &= \frac{\rho v_1^2}{2} + \rho \cdot g \cdot h_1 + p_1
 \end{aligned}$$

Falls wirbelfrei, dann Konstanz über ganzen flüssigen Bereich der Größe:

$$\text{Bernoulli-Gleichung: } \boxed{\frac{\rho v^2}{2} + \rho \cdot g \cdot h + p = \text{const.}} \quad (3.90)$$

Folgerung:  $V \uparrow \Rightarrow p \downarrow$

Siehe Versuche: Ball schwebt in Luftströmung, Rohr mit Verengung

### Ausströmung

Wir betrachten einen Behälter im inneren herrscht der Druck  $p_{\text{Rohr}}$  ausserhalb herrscht der Druck  $p_{\text{ausser}}$ . Die Differenz der zwei Drücke beträgt also:  $\Delta p = p_{\text{Rohr}} - p_{\text{ausser}}$ . Durch Einsetzen in die Bernoulli Gleichung erhalten wir: Bunsensches Ausströmungsgesetz:

$$p_{\text{Rohr}} = \frac{\rho \cdot v^2}{2} + p_{\text{außen}} \quad (3.91)$$

$$\Delta p = \frac{\rho \cdot v^2}{2} \quad (3.92)$$

$$v = \sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho}} \quad (3.93)$$

$$\rho = \frac{2\Delta p}{v^2} \quad (3.94)$$



**Umströmung von Körpern**

$p_0$	statischer Druck
$p$	Druck im Staupunkt S
$\Delta p = p_0 - p$	Staudruck

$$\frac{\rho \cdot v_0^2}{2} + p_0 = p \Rightarrow \Delta p = \frac{\rho \cdot v_1^2}{2} \quad (3.95)$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{2 \cdot \Delta p}{\rho}} \quad (3.96)$$

Diese Messung wird mit Hilfe eines Prandtlrohrs durchgeführt.

**Zirkulation und Wirbel**

Man bildet das Kurvenintegral der Geschwindigkeiten in einer Flüssigkeit entlang einer geschlossenen Kurve  $c$ .

$$\text{Definition: Zirkulation } z = \oint \vec{v} \cdot d\vec{s} \quad (3.97)$$

$c$  ... Kurve

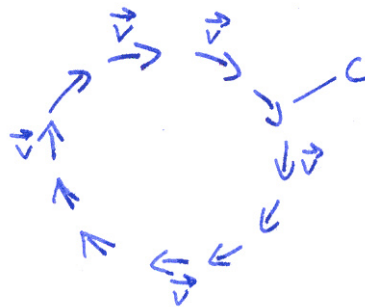


Abbildung 3.5:  $z \neq 0$

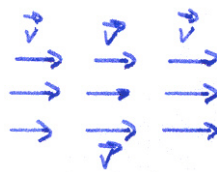


Abbildung 3.6:  $z = 0$

**Reibungsfreie Fluide**

Thomsonscher Satz:

$$\frac{d}{dt} z = 0 \quad (3.98)$$

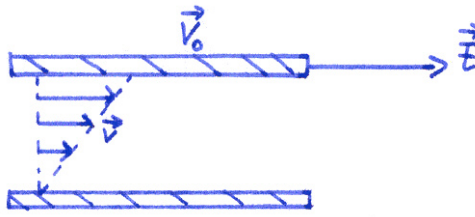


Abbildung 3.7: Ein bewegter Rand nimmt die Flüssigkeit mit

### 3.7.6 Reibung in Fluiden

#### Zähigkeit

Wir betrachten eine Flüssigkeit zwischen 2 Platten. Die Untere ist in Ruhe, die Obere bewegt sich mit der Geschwindigkeit  $v_0$ . Jetzt kommt es dazu, dass die verschiedenen Flüssigkeitsschichten verschiedene Geschwindigkeiten haben. Dies wird durch  $dv/dz$  dargestellt. Die Kraft  $\vec{F}$  ist nötig, um die obere Platte zu bewegen.

$$\text{Definition Zähigkeit } \eta : |\vec{F}| = \eta \cdot A \cdot \frac{dv}{dz} \quad (3.99)$$

$$[\eta] = [Pa \cdot s]$$

Da die Zähigkeit immer eine sehr kleine Zahl ist wird sie üblicherweise in mPa angegeben.

#### Beispiele für Zähigkeiten

- Wasser  $1,0 mPa \cdot s$
- Benzol  $0,65 mPa \cdot s$
- Glyzerin  $1480 mPa \cdot s$
- Luft (1 Bar)  $0,017 mPa \cdot s$

Die Zähigkeit von Luft kann gemessen werden, indem man zwei Teller mit einer dünnen Luftschicht zwischen ihnen aufhängt. Wenn man jetzt einen der beiden Teller in schnelle Rotation versetzt, fängt der andere auch an sich zu drehen.

$$\text{kinematische Zähigkeit: } \nu = \frac{\eta}{\rho} \quad (3.100)$$

#### Laminare Strömung

- Rohr

Der Durchsatz  $Q$  eines Rohrs im Fall einer laminaren Strömung wird durch das Hagen-Poiseuillesche Gesetz beschrieben.

$$Q = \frac{\pi \cdot R^4}{8\eta} \cdot \frac{\Delta p}{L} \quad (3.101)$$



Abbildung 3.8: Eine laminare Strömung in einem Rohr

- Kugel (Kugelradius  $r$ ). Geschwindigkeit der anströmenden Flüssigkeit  $v_0$ . Dieses Gesetz heisst Stokes-Gesetz.

$$\left| \vec{F}_R \right| = 6\pi\eta \cdot r \cdot v_0 \quad (3.102)$$

### Ähnlichkeit von Strömungen

- Lineardimension  $l$
- Ausströmungsgeschwindigkeit  $u$
- Kinematische Zähigkeit  $\nu$

$$\text{Reynoldszahl } Re = \frac{l \cdot u}{\nu} = \frac{l \cdot \rho \cdot u}{\eta} \quad (3.103)$$

Wenn bei Experimenten die Reynoldszahlen gleich sind, sind die Experimente vergleichbar.

### Turbulenzen

Turbulenzen entstehen, wenn die Reynoldszahl grösser als 1 ist, da dann die Trägheitskraft grösser als die Reibung ist. Allerdings sind in zylindrischen Röhren Reynoldszahlen  $Re \approx 1000$  ohne Turbulenzen möglich.

### 3.7.7 Spannungen

Spannungen sind Kräfte auf eine Fläche. Die Einheiten dieser Spannungen ist:  $[N \cdot m^{-2}]$ . Wir unterscheiden folgende Arten von Spannungen.

1. Normalspannungen
  - (a) Zugspannungen  $\sigma$
  - (b) Druckspannungen  $\rho$
2. Tangentialspannungen  $\tau$

### Verzerrungen

- Volumsänderung (Ohne Gestaltsänderung)

$$\Delta V = V - V_0$$

Relative Volumensänderung :  $\Phi = \frac{\Delta V}{V_0}$

- Scherung (Ohne Volumsänderung)

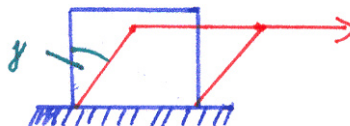


Abbildung 3.9: Scherung

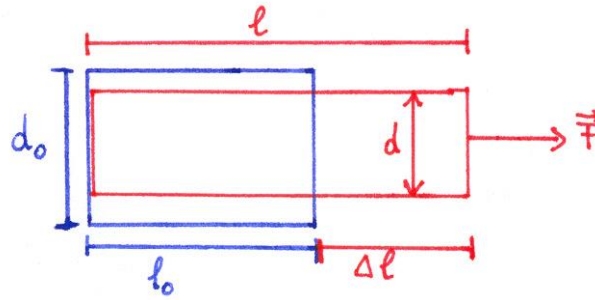


Abbildung 3.10: Dehnung

**Einseitige Drehung/Kompression**

$$\Delta l = l - l_0 \quad (3.104)$$

$$\text{relative Längenänderung:} \quad \epsilon = \frac{\Delta l}{l_0} \quad (3.105)$$

$$\Delta d = d - d_0 \quad (3.106)$$

$$\text{relative Querkontraktion:} \quad \epsilon_q = \frac{\Delta d}{d_0} \quad (3.107)$$

$$\text{Poisson-Zahl:} \quad \mu = \frac{\epsilon_q}{\epsilon} \quad (3.108)$$

**Zusammenhang  $\epsilon$  und  $\Phi$** 

$$\begin{aligned} \Delta V &= \underbrace{(d_0 + \Delta d)^2 \cdot (l_0 + \Delta l)}_V - \underbrace{d_0^2 \cdot l_0}_{V_0} \\ &= d_0^2 \cdot l_0 + d_0^2 \cdot \Delta l + (\Delta d)^2 \cdot l_0 + (\Delta d)^2 \cdot \Delta l + 2d_0 \Delta d l_0 + 2d_0 \Delta d \Delta l - d_0^2 \cdot l_0 \\ &= d_0^2 \cdot \Delta l + \boxed{(\Delta d)^2 \cdot l_0} + \boxed{(\Delta d)^2 \cdot \Delta l} + 2d_0 \cdot \Delta d \cdot l_0 + \boxed{2d_0 \Delta d \cdot \Delta l} \\ &\text{Kleine Veränderungen} \Rightarrow \boxed{\text{Text in Kästchen}} \mapsto 0 \Rightarrow \text{vernachlässigbar} \\ &\approx d_0^2 \cdot \Delta l + 2d_0 \cdot \Delta d \cdot l_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{\Delta V}{V_0} = \frac{\Delta V}{d_0^2 l_0} = \frac{\Delta l}{l_0} + \frac{2d_0 \cdot \Delta d \cdot l_0}{d_0^2 \cdot l_0} = \frac{\Delta l}{l_0} + \frac{2\Delta d}{d_0} \\ &= \epsilon - 2 \underbrace{\epsilon_q}_{\epsilon \cdot \mu} = \epsilon(1 - 2\mu) \end{aligned}$$

Also gilt:

$$\Phi = \epsilon(1 - 2\mu) \quad (3.109)$$

Im Proportionalitätsbereich geht ein Körper nach dem Wegnehmen einer angelegten Kraft wieder in seine Ruhelage zurück.

$0 \rightarrow P$  Proportionalitätsbereich

$P \rightarrow F$

$F \rightarrow Z$  Plastischer Bereich

Nach der Fließgrenze  $F$  verliert der Körper seine innere Struktur.

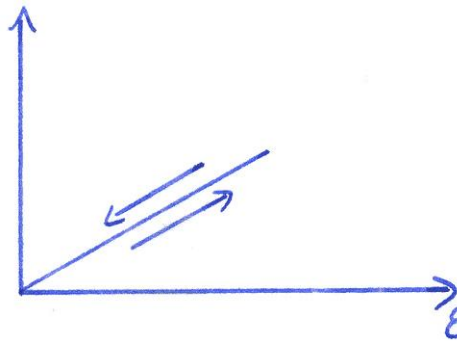


Abbildung 3.11: Dehnung Proportionaler Bereich

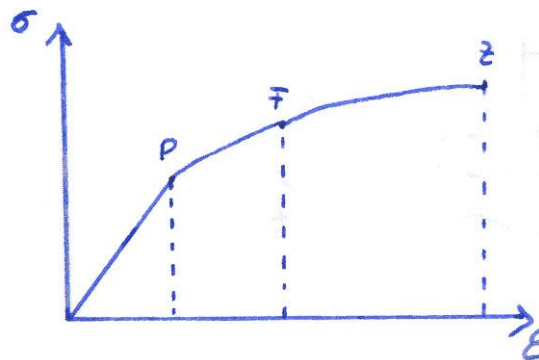


Abbildung 3.12: Dehnung in 3 Bereichen

**Hookssches Gesetz**

Linearer Zusammenhang zwischen rel. Längenänderung und Zugspannung.  
 $E$  ... Dehnungsmodul (auch Elastizitätsmodul)

$$\epsilon = \frac{1}{E} \cdot \sigma \quad (3.110)$$

$$\epsilon_q = \mu \cdot \frac{1}{E} \cdot \sigma \quad (3.111)$$

**Allseitige Kompression**

$k$  ... Kompressionsmodul  
 $\frac{1}{k}$  ... Kompressionselastizität

$$\Phi = -\frac{1}{k} \cdot p \quad (3.112)$$

**Scherung (Torsion)**

$G$  ... Torsionsmodul

$$\gamma = \frac{1}{G} \cdot \tau \quad (3.113)$$

**Amorphe Festkörper**

Durch den Zusammenhang der Konstanten braucht man sich experimentell nicht alle Konstanten ermitteln. Diese sind in den meisten Fällen  $E$  und  $G$  weil sie am einfachsten zu ermitteln sind.

$$\frac{E}{2G} = (1 + \mu) \quad (3.114)$$

$$\frac{E}{3k} = (1 - 2\mu) \quad (3.115)$$

**Versuch: Exp. Bestimmung von  $E$** 

$$\frac{\Delta l}{l_0} = \frac{1}{E} \dot{\sigma} \Rightarrow \Delta l = \frac{l_0}{E} \cdot \sigma \Rightarrow \boxed{E = \frac{l_0}{\Delta l} \cdot \sigma}$$

Messungen

$$l_0 = 1m$$

$$d_{\text{Draht}} = 2 \cdot 10^{-4}m$$

$$\sigma = \frac{m \cdot g}{d_0^2 \cdot \pi} \cdot 4 \approx \frac{10 \cdot 4}{4 \cdot 10^{-8} \pi} \approx 3,2 \cdot 10^8 \frac{N}{m^2}$$

$$\Delta l = 1,7 \cdot 10^{-3}m \Rightarrow E = 188 \cdot 10^9 \frac{N}{m^2}$$

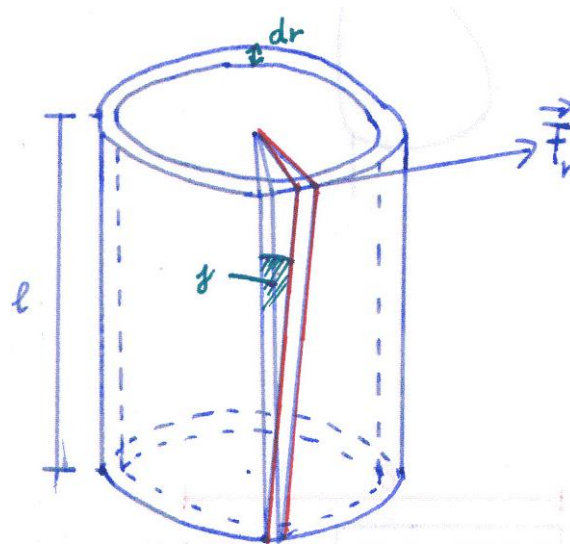
**Torsion/Scherung (+Versuch)**

Abbildung 3.13: Torsion / Scherung eines Zylinders

$$l \cdot \mu = r \cdot \varphi \Rightarrow \mu = \frac{r \cdot \varphi}{l}$$

$$\tau = G \cdot \mu = G \cdot \frac{r \cdot \varphi}{l} \Rightarrow \boxed{N = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{G \cdot R^4}{l} \cdot \varphi}$$

$$\Rightarrow \boxed{G = \frac{2l}{\pi \cdot R^4} \cdot \frac{N}{\varphi}}$$

Messungen

$$\bar{l} = 0,63m$$

$$R = 1,5 \cdot 10^{-3}m$$

$$R_s = 5,95 \cdot 10^{-2}m$$

$$m = 100g = 0,1kg$$

$$g = 10 \frac{m}{s^2}$$

$$N = mg \cdot R_s \approx 4,95 \cdot 10^{-2}Nm$$

$$\varphi = \frac{0,129}{2}rad$$

$$G = 73,110^9 \frac{N}{m^2}$$

### 3.7.8 Härte von Festkörpern

- Ritz-Verfahren (Härteskala)  
Skala, welcher Körper einen anderen ritzt.
- Brinell-Verfahren (für weiche Materialien)  
Eine gehärtete Stahlkugel wird auf die Oberfläche gelegt. Je tiefer die Kugel einsinkt, je weicher ist das Material.

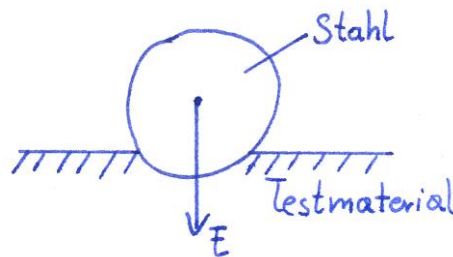


Abbildung 3.14: Brinell-Verfahren zur Härtebestimmung

### 3.7.9 Reibung

Die Reibung bezeichnet die Wechselwirkung zwischen 2 Körperoberflächen. Die Reibungskraft ist nur proportional zur Normalkraft. Die Fläche zwischen den beiden Körpern spielt keine Rolle.

- Haftreibung, muss überwunden werden, um einen Körper in Bewegung zu setzen.

$$F_H = \mu_H \cdot F_N$$

- Gleitreibung

$$F_G = \mu_G \cdot F_N$$

- Rollreibung

$$N_R = \mu_R \cdot F_N$$

# Kapitel 4

## Schwingungen und Wellen

**Schwingungen** Zeitlich periodisch

**Wellen** Zeitl. und räumlich periodisch

Arten

**Mechanische Wellen** zB.: Akustik

**elektromagnetische Wellen** zB.: Licht, Wärmestrahlung

**Quantenmechanisches Wellenbild** 'De Broglie'

**Struktur der Materie**

### 4.1 Schwingungen

Als einfachsten Fall betrachten wir den harmonischen Oszillator. Für diesen gilt, dass die rücktreibende Kraft proportional zur Auslenkung ist, also:

#### 4.1.1 Ungedämpfte Schwingungen

$$\begin{aligned} F &\propto x \\ m\ddot{x} &= -kx \\ m\ddot{x} + kx &= 0 \end{aligned}$$

k ... Rückstellkonstante

a ... Amplitude (maximale Auslenkung)

x ... (momentane) Auslenkung

$\omega$  ... Kreisfrequenz

$$\begin{aligned} \text{Ansatz:} \quad x &= a \cdot e^{i\omega t} \\ \dot{x} &= ai\omega e^{i\omega t} \\ \ddot{x} &= a(i\omega)^2 e^{i\omega t} = -a\omega^2 e^{i\omega t} \\ \text{Einsetzen:} \quad -ma\omega^2 e^{i\omega t} + kae^{i\omega t} &= 0 \\ -m\omega^2 + k &= 0 \end{aligned}$$

Für die Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  gilt also:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (4.1)$$



### 4.1.2 Zeigerdarstellung

Bei der Zeigerdarstellung betrachten wir die Bewegung von  $x = a \cdot e^{i\omega t}$  in der Gaußschen Zahlenebene. Der Realteil entspricht hier der Auslenkung.

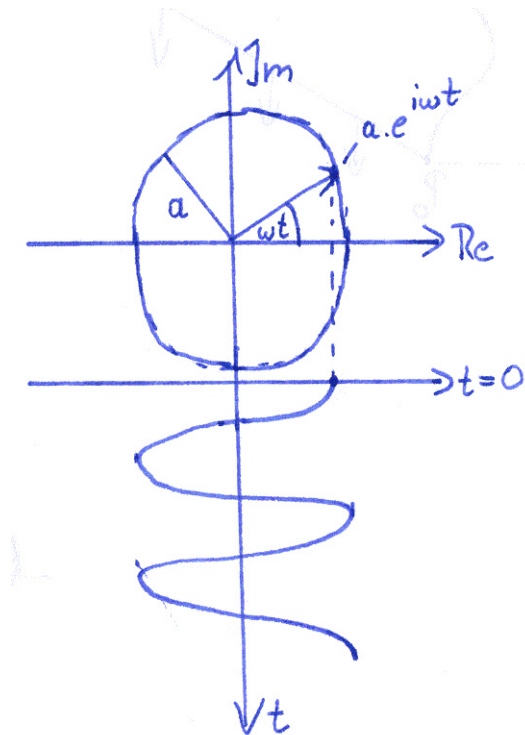


Abbildung 4.1: Beispiel: Zeigerdarstellung

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(x) &= a \cdot \cos(\omega t) \\ \operatorname{Re}(x) &= a \cdot \cos(\omega(t + t_0)) = a \cdot \cos(\underbrace{\omega t + \varphi}_{\text{Phase}}) \end{aligned}$$

$\varphi$  ... Phasenverschiebung

### 4.1.3 Schwingungsdauer T

Die Schwingungsdauer beschreibt die Zeit, in der eine Periode durchlaufen wird.

$$\begin{aligned} \cos(\omega(t + T)) &= \cos(\omega t) \\ \omega(t + T) &= \omega t + 2\pi \\ \omega t + \omega T &= \omega t + 2\pi \\ \Rightarrow T &= \frac{2\pi}{\omega} \end{aligned}$$

### 4.1.4 Frequenz

Die Frequenz  $\nu$  beschreibt die Anzahl der Schwingungen, die pro Zeiteinheit ausgeführt werden.

$\nu$  ... Ny

$$\begin{aligned} \nu &= \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \\ \omega &= 2\pi\nu \end{aligned}$$

### 4.1.5 Überlagerungen von Schwingungen

#### 1. Eindimensional

- 2 Schwingungen mit gleicher Frequenz
  - 2 Schwingungen mit ähnlichen Frequenzen
- $$x_1 = a \cdot \cos(\omega_1 t)$$
- $$x_2 = a \cdot \cos(\omega_2 t)$$

$$x = x_1 + x_2 = 2a \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t\right) \cos\left(\underbrace{\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}}_{\bar{\omega}} t\right)$$

- N Schwingungen mit unterschiedlicher Frequenz

$$x = \sum_{n=1}^N a_n \cdot \cos(\omega_n t + \varphi_n)$$

Siehe Fourieranalyse, -synthese.

#### 2. Zweidimensional

- 2 senkrechte Schwingungen gleicher Frequenz
- $$x = a \cdot \sin(\omega t)$$
- $$y = b \cdot \sin(\omega t - \varphi)$$
- $t$  eliminieren  $\Rightarrow$  Ellipsengleichung  $\Rightarrow y_0 = 0 \dots$  Gerade
- 2 senkrechte Schwingungen; rationales Verhältnis
  - irrationales Verhältnis

### 4.1.6 Gedämpfte Schwingungen

$r \dots$  Reibungskonstante

$k \dots$  Rückstellkonstante

Schwingungsgleichung:	$m\ddot{x} = -kx - r\dot{x}$
	$m\ddot{x} + kx + r\dot{x} = 0$
Ansatz:	$x = a \cdot e^{i\omega t}$
	$\dot{x} = a \cdot i\omega \cdot e^{i\omega t}$
	$\ddot{x} = a \cdot (i\omega)^2 \cdot e^{i\omega t} = -a \cdot \omega^2 \cdot e^{i\omega t}$
Einsetzen:	$-a\omega^2 e^{i\omega t} m + ai\omega e^{i\omega t} r + k \cdot a \cdot e^{i\omega t} = 0$
	$-\omega^2 m + i\omega r + k = 0$
	$\Rightarrow \boxed{\omega^2 - \frac{ir}{m}\omega - \frac{k}{m} = 0}$

- Fall ungedämpft:  $r = 0$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \equiv \omega_0$$

- Fall Dämpfung  $r \neq 0$

$$\omega = i \cdot \frac{r}{2m} \pm \sqrt{-\frac{r^2}{4m^2} + \omega_0^2}$$

1. schwache Dämpfung  $\frac{r}{2m} < \omega_0$

$$\omega = i \cdot \frac{r}{2m} \pm \sqrt{\underbrace{-\frac{r^2}{4m^2} + \omega_0^2}_{>0}}$$

mit:  $x = a \cdot e^{i\omega t}$   
 $\Rightarrow x = a \cdot e^{-\frac{r}{2m}t} \cdot e^{i\sqrt{\omega_0^2 - \frac{r^2}{4m^2}}t}$

Bezeichnungen

$$\begin{aligned} \frac{r}{2m} &\equiv \gamma \\ \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} &\equiv \omega_\alpha \end{aligned}$$

Damit:  $x = a \cdot e^{-\gamma t} \cdot e^{i\omega_\alpha t}$

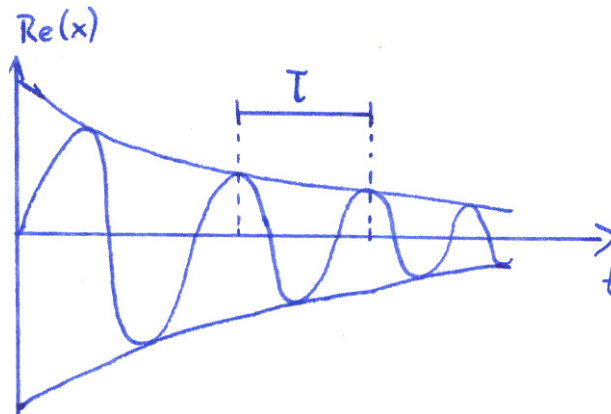


Abbildung 4.2: Gedämpfte Schwingung

$$T = \frac{2\pi}{\omega_\alpha} \quad (4.2)$$

$$\tau = \frac{1}{\gamma} \quad (4.3)$$

$T$  ist die Periode einer Schwingung.  $\tau$  ist die Zeit, in der die Amplitude  $a$  einer Schwingung zu  $\frac{a}{e}$  wird.

2. Starke Dämpfung  $\frac{r}{2m} > \omega_0$

$$\omega = i \cdot \underbrace{\frac{r}{2m}}_{\gamma} \pm i \sqrt{\underbrace{\frac{r^2}{4m^2} - \omega_0^2}_{>0}}$$

mit:  $x = a \cdot e^{i\omega t}$   
 $\Rightarrow x = a \cdot e^{-\gamma t} \cdot \left( e^{-\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}t} + e^{\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}t} \right)$

Bezeichnung:

$$\alpha \equiv \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

$$\Rightarrow x = a \cdot e^{-\gamma t} (e^{-\alpha t} + e^{\alpha t})$$

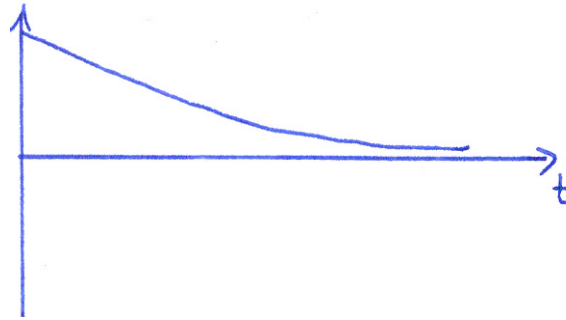


Abbildung 4.3: Kriechfall (aperiod.)

#### 4.1.7 Erzwungene Schwingung

$$m\ddot{x} = -kx - r\dot{x} + F \cdot e^{i\omega t}$$

$$m\ddot{x} + r\dot{x} + kx = F \cdot e^{i\omega t}$$

Stationäre Lösungen: Spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung.

Ansatz:  $x = a \cdot e^{i\omega t}$

$$\dot{x} = \dots \ddot{x} = \dots$$

Einsetzen:  $-ma\omega^2 \cdot e^{i\omega t} + rai\omega t e^{i\omega t} + kae^{i\omega t} = Fe^{i\omega t}$

$$-ma\omega^2 + rai\omega t + ka = F$$

$a$  = komplexe Zahl

$$|a| = \frac{F}{\sqrt{Re(a)^2 + Im(a)^2}} = \frac{F}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}}$$

$$\tan(\varphi) = \frac{Im(a)}{Re(a)} = -\frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

Max. Amplitude, wenn Nenner minimal:

$$\frac{d}{d\omega} [(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\gamma\omega)^2] = 0$$

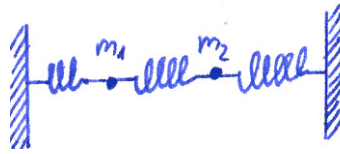
$$2(\omega_0^2 - \omega^2)(-2\omega) + 8\gamma^2\omega = 0$$

$$\omega^2 - \omega_0^2 + 2\gamma^2 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}} \equiv \omega_R \dots \text{Resonanzfrequenz}$$

#### 4.1.8 Gekoppelte Oszilatoren

Wird eine der Massen in Bewegung versetzt, überträgt sich ihre gesamte Energie nach einer bestimmten Zeit auf die andere Masse. Darauf läuft die Energie wieder zur ersten zurück. Dieser



Vorgang wiederholt sich.

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 &= -k_1 x_1 - k_{12}(x_1 - x_2) \\ m_2 \ddot{x}_2 &= -k_2 x_2 - k_{12}(x_2 - x_1) \end{aligned}$$

## 4.2 Wellen

Wellenausbreitung durch Kopplung von Oszillatoren.

### 4.2.1 Eindimensionale Wellen

$u$  ... periodische Abweichung von Ruhelage

$u_0$  ... Amplitude  $k$  ... Wellenzahl

$$u_{(x,t)} = u_0 \cdot \underbrace{\cos(\omega t - kx)}_{\text{Phase}} \quad (4.4)$$

### 4.2.2 Schwingungsdauer $T$

Die Schwingungsdauer beschreibt, welche Zeit es dauert bis am gleichen Punkt der Welle wieder der gleiche Schwingungszustand herrscht.

$$\begin{aligned} \cos(\omega(t+T)) &= \cos(\omega t) \\ \omega(t+T) &= \omega t + 2\pi \\ \omega t + \omega T &= \omega t + 2\pi \\ \Rightarrow \boxed{T = \frac{2\pi}{\omega}} \end{aligned}$$

### 4.2.3 Schwingungen pro Zeiteinheit (Frequenz)

Die Frequenz  $\nu$  beschreibt, wieviele Schwingungen am gleichen Ort pro Zeiteinheit durchgeführt werden.

$$\begin{aligned} \nu &= \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \\ [\nu] &= [s^{-1}] = [Hz] \end{aligned} \quad (4.5)$$

### 4.2.4 Wellenlänge

Die Wellenlänge bezeichnen wir mit  $\lambda$ . Sie beschreibt den Abstand von zwei gleichen Schwingungszuständen.

$$\begin{aligned} \cos(k(x+\lambda)) &= \cos(kx) \\ k(x+\lambda) &= kx + 2\pi \\ kx + k\lambda &= kx + 2\pi \\ \Rightarrow \boxed{\lambda = \frac{2\pi}{k}} \end{aligned}$$

### 4.2.5 Wellen pro Längeneinheit

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{k}{2\pi} \quad (4.6)$$

### 4.2.6 Ausbreitungsgeschwindigkeit

- Punkte konstanter Phase

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \underbrace{\omega t - kx}_{\text{Phase}} \right) &= 0 \\ \omega - k \frac{dx}{dt} &= 0 \\ \omega &= k \frac{dx}{dt} \\ v_{\text{Phase}} = \frac{dx}{dt} &= \frac{\omega}{k} = \frac{\lambda}{\tau} = \lambda \cdot \nu \end{aligned}$$

- Wellengruppen/-pakete

Wir betrachten 2 Wellen mit ähnlichen Frequenzen. Die erste Welle hat die Winkelgeschwin-

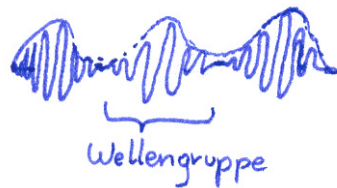


Abbildung 4.4: Wellengruppe

digkeit  $\omega$  und die Wellenzahl  $k$ . Die zweite Welle hat die Winkelgeschwindigkeit  $\omega + \Delta\omega$  und die Wellenzahl  $k + \Delta k$ .

Wenn die beiden Phasen  $kx - \omega t$  und  $(k + \Delta k)x - (\omega + \Delta\omega)t$  übereinstimmen, kommt es zu einer maximalen Verstärkung. Die Geschwindigkeit, mit der sich eine Solche maximale Verstärkung ausbreitet bezeichnen wir als  $v_{\text{Gruppe}}$ .

$$\begin{aligned} kx - \omega t &= (k + \Delta k)x - (\omega + \Delta\omega)t \\ kx - \omega t &= kx + \Delta kx - \omega t - \Delta\omega t \\ \Delta kx &= \Delta\omega t \\ v_{\text{Gruppe}} = \frac{x}{t} &= \frac{\Delta\omega}{\Delta k} = \frac{d\omega}{dk} \end{aligned}$$

### 4.2.7 Zusammenfassung

$$\begin{aligned}
 v_{\text{Phase}} &= \frac{\omega}{k} \Rightarrow v_{\text{Gruppe}} = \frac{d(k \cdot v_{\text{Phase}})}{dk} \\
 v_{\text{Gruppe}} &= v_{\text{Phase}} + k \cdot \frac{dv_{\text{Phase}}}{dk} \\
 \text{Umformung: } k \rightarrow \lambda : k &= \frac{2\pi}{\lambda} \\
 \Rightarrow v_{\text{Gruppe}} &= v_{\text{Phase}} + \frac{2\pi}{\lambda} \underbrace{\frac{dv_{\text{Phase}}}{d\lambda} \frac{d\lambda}{dk}}_{\frac{dv_{\text{Phase}}}{dk}} \\
 \left[ \frac{d\lambda}{dk} = \frac{d}{dk} \cdot \frac{2\pi}{k} = -2\pi \frac{1}{k^2} = -2\pi \left( \frac{\lambda^2}{4\pi^2} \right) \right] \\
 v_{\text{Gruppe}} &= v_{\text{Phase}} + \frac{2\pi}{\lambda} \left( -\frac{\lambda^2}{2\pi} \right) \cdot \frac{dv_{\text{Phase}}}{d\lambda} \\
 \Rightarrow v_{\text{Gruppe}} &= v_{\text{Phase}} - \lambda \frac{dv_{\text{Phase}}}{d\lambda}
 \end{aligned}$$

Änderung der Phasengeschwindigkeit mit der Wellenlänge: Dispersion.

### 4.2.8 Wellengleichung

$$\begin{aligned}
 u &= u_0 \sin(\omega t - kx) \\
 \frac{du}{dx} &= u_0 k \cos(\omega t - kx) \\
 \frac{d^2 u}{dx^2} &= -u_0 k^2 \sin(\omega t - kx) \dots / : k^2 \\
 \frac{d^2 u}{dt^2} &= -u_0 \omega^2 \sin(\omega t - kx) \dots / : \omega^2 \\
 \frac{1}{\omega^2} \frac{d^2 u}{dt^2} &= \frac{1}{k^2} \frac{d^2 u}{dx^2} \\
 \frac{k^2}{\omega^2} \frac{d^2 u}{dt^2} &= \frac{d^2 u}{dx^2}
 \end{aligned}$$

Wir erhalten also folgende Gleichung zum Beschreiben von Wellen

$$\frac{1}{v_{\text{Phase}}^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (4.7)$$

Diese bedeutet, dass die Krümmung der Welle angibt, welche rücktreibende Kraft wirkt.

## 4.3 Doppler Effekt

Der Doppler Effekt beschreibt, was passiert, wenn man eine Quelle und einen Beobachter haben, die sich relativ zueinander bewegen. Wir betrachten als erstes Vorgänge in einem Medium, das als Bezugssystem dient. Also als ruhend angenommen wird.

### 4.3.1 Quelle bewegt sich, Beobachter ruht

Frequenz ?

Vom Beobachter wahrgenommene Wellenlänge:  $\lambda'$

Geschwindigkeit der Quelle:  $v_Q$

$v$  : Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle.

Wir nehmen an, dass sich die Wellen nachdem sie emittiert wurden, gleichmässig im Medium ausbreiten, und dass sich die Quelle geradlinig auf den Beobachter zu- oder wegbewegt. Dann gibt es eine Verschiebung, der Wellenlänge, um die Strecke, die die Quelle in der Schwingungsdauer zurückgelegt hat. Also  $\Delta\lambda = v_Q \cdot T$ .

Wellenlänge beim Beobachter verändert sich:

$$\begin{aligned}\lambda' &= \lambda - v_Q T \\ v &= \lambda \nu = \frac{\lambda}{T} \\ T &= \frac{\lambda}{\nu} \\ \lambda' &= \lambda(1 \mp \frac{v_Q}{v}) \\ \nu' &= \frac{\nu}{1 \mp \frac{v_Q}{v}}\end{aligned}$$

Näherung für kleine Geschwindigkeiten  $v_Q \ll v$ :

$$\nu' = \nu(1 \pm \frac{v_Q}{v})$$

### 4.3.2 Quelle ruht, Beobachter bewegt sich

Wenn der Beobachter sich auf die Quelle zu bewegt nimmt er die Welle mit einer höheren Frequenz wahr. Der Beobachter durchfährt eine Ganze Periode in der Zeit  $\lambda/v_B$ . Also ändert sich die Frequenz  $\nu = 1/T$  um  $\Delta\nu = v_B/\lambda$ .

$$\begin{aligned}\nu' &= \nu + \frac{v_B}{\lambda} \\ v &= \lambda \nu \\ \lambda &= \frac{v}{\nu} \\ \nu' &= \nu(1 \pm \frac{v_B}{v}) \\ \nu' &= \nu + \Delta\nu \\ \Delta\nu &= \nu \frac{v_{Rel}}{v}\end{aligned}$$

### 4.3.3 Dopplereffekt bei Licht, elektromagnetische Wellen

Relativitätstheorie, kein Medium in dem es sich ausbreitet.  
Es kommt nur auf die Relativgeschwindigkeit an.

$$\nu' = \nu \sqrt{\frac{1 + v_{Rel}/c}{1 - v_{Rel}/c}} \quad (4.8)$$

$c$  Lichtgeschwindigkeit im Vakuum

$v_{Rel}$  Relativgeschwindigkeit von Beobachter-Quelle



**Transversaler Dopplereffekt**

Bei einer Querbewegung am Beobachter vorbei, gibt es im Quellsystem vom Beobachter aus gesehen eine Zeitdilatation. Zeit in Q vergeht langsamer.

**4.3.4 Machscher Kegel**

Es entsteht ein einhüllender Kegel um die Schallwellen, es entsteht eine kegelförmige Wellenfront  
Öffnungswinkel des Machscher Kegels

$$\sin\theta = \frac{v}{v_Q} \quad (4.9)$$

Bei Licht: in einem Medium  $v_{Teilchen} > c_{Medium}$   
Dies heißt dann Cerenkov-Strahlung  
Benutzt, zum Nachweis von Elementarteilchen.

# Kapitel 5

## Thermodynamik

### 5.1 Einführung

#### 5.1.1 Temperatur

Die Temperatur ist ein Maß für die kinetische Energie. Allerdings liegt die kinetische Energie hier nicht als wohlgeordnete Bewegung wie zum Beispiel bei einem runterfallenden Buch vor, sondern als chaotische Bewegung der einzelnen Teilchen.

Als erstes werden wir uns aber nicht genauer damit befassen, was Temperatur ist, sondern damit wie man sie beschreiben kann.

#### 5.1.2 Temperaturskalen

Wenn wir eine Grösse definieren, müssen wir auch immer angeben, wie wir sie messen und damit beschreiben können. Für die Temperatur werden folgende drei Skalen verwendet.

##### Celcius

Die Celciusskala wird durch folgende Fixpunkte festgelegt.

1. Gefrierpunkt  $H_2O$   $t_c = 0^\circ C$  Eiswassermischung.
2. Siedepunkt  $H_2O$   $t_c = 100^\circ C$  kochendes Wasser

Bei  $p = 1 \text{ atm}$ .

Lineare Teilung in 100 Teile.

$$\frac{\text{Laengenänderung}}{\text{Temperaturänderung}} = \text{const}$$
$$\frac{l_{t_c} - l_0}{t_c} = \text{const}$$

##### Fahrenheit

Alte Definition:

1.  $t_F = 0^\circ F$  Salmit-Schneemischung
2.  $t_F = 100^\circ F$  Körpertemperatur des Menschen

Exakte Definition

$$t_c = \frac{5}{9}(t_F - 32) \quad (5.1)$$

$$\begin{array}{ll} 32^\circ\text{F} & 0^\circ\text{C} \\ 0^\circ\text{F} & -17.8^\circ\text{C} \end{array}$$

### Tripelpunkt des Wassers

Koexistenz von Eis, Wasser und Dampf bei:

$$t_c = 0.01^\circ\text{C} \quad p = 6.105\text{bar}$$

### Absoluter Nullpunkt

Es findet keine Wärmebewegung mehr statt bei  $t_c = -273.15^\circ\text{C}$

### Kelvin

Die Kelvinskala ist die in der Physik übliche Skala. Immer wenn ein T in einer Formel vorkommt, ist die Temperatur in Kelvin gemeint. Allerdings ist es bei Temperaturunterschieden egal, ob man sie in Kelvin oder Celcius misst, da die Unterteilung gleich ist.

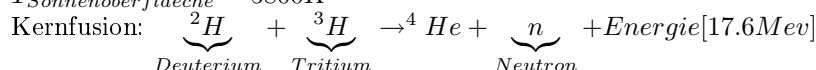
1.  $T = 0 \text{ K}$  Absoluter Nullpunkt
2.  $T = 273.16 \text{ K}$  Tripelpunkt des Wassers

Umrechnung von der Kelvinskala in die Celciusskala. Dies ist eine einfache Addition.

$$T = t_c + 273.15 \quad (5.2)$$

Substanz	T Schmelze (K)	T Siede (K)
He		4.2
$N_2$	77	
$H_2O$	273	373
Al	659	2447
Fe	1536	3070
W	3390	5500
C (Graphit)	3800 (Sublimiert Fest $\rightarrow$ Gasförmig)	

$$T_{\text{Sonnenoberfläche}} = 5800\text{K}$$



Hierfür benötigte Temperatur:  $T = 10^8\text{K}$

### 5.1.3 Temperaturmessung

Zur Temperaturmessung kann jedes temperaturabhängige Phänomen verwendet werden. Allerdings ist für eine möglichst einfache Messung ein Phänomen mit einer linearen Änderung mit der Temperatur zu bevorzugen.

#### Thermische Ausdehnung

Quecksilberthermometer: Ausdehnung einer Flüssigkeit

Weingeistthermometer (Alkohol)

#### Gasthermometer

Veränderung des Drucks eines Gases als Funktion der Temperatur.

### 5.1.4 Technische Temperaturmessung

#### Bimetalstreifen

Jeder Stoff dehnt sich bei Temperaturerhöhung aus. Aber diese Ausdehnung ist stoffabhängig. Wenn man jetzt 2 Metalle miteinander verbindet, verbiegen sie sich, weil sich das eine stärker ausdehnt als das andere. In der Praxis werden zum Beispiel Eisen und Kupfer verwendet.

#### Thermoelement

Hier wird der Thermoelektrische Effekt ausgenutzt. Wenn zwei Metalle miteinander verbunden sind entsteht eine Kontaktspannung. Diese ist Temperatur abhängig.

$$U = e(t_2 - t_1) \quad (5.3)$$

$e$  ist ein material abhängiger Koeffizient.

Für solche Thermometer wird Kupfer und Konstantan verwendet.

#### Widerstandsthermometer

$$R_t = R_0 \cdot (1 + \alpha t + \beta t^2 + \dots)$$

Die Koeffizienten beschreiben die Abhängigkeit des Widerstands von der Temperatur. Diese sind Materialeigenschaften.

Bei Konstantan  $\alpha = 0, \beta = 0 \Rightarrow R = \text{const}$

#### Platinthermometer

1. R linear mit t  $\beta = 0$
2. Platin ist Edelmetall. Sehr resistent gegen Umwelteinflüsse

Pt100: 100Ω bei 0° C

PTC: Positiver Temperatur Koeffizient

$\delta > 0$  Metalle, etc.

NTC: Negativer Temperatur Koeffizient

$\delta < 0$  Halbleiter

#### Strahlungsipyrometer

Ein Strahlungsipyrometer wird für Temperaturen über 1000 K bis 3000 K benützt. Gemessen wird die Strahlung. Man sieht glühenden Körper und einen Glühfaden. Man regelt den Strom, der durch den Glühfaden fließt so, dass er die gleiche Farbe hat, wie der Gegenstand.

### 5.1.5 Thermische Ausdehnung

Wir betrachten Körper mit Länge  $l$ . Wir erwärmen ihn. Er dehnt sich aus.

$T_1, T_2$  Temperaturen

$l_1, l_2$  Längen

$$\begin{aligned} T_1 - T_2 &= \Delta T > 0 \\ \Delta l &= \alpha l \Delta T \end{aligned}$$

$$\alpha = \frac{\Delta l/l}{\Delta T} \quad (5.4)$$

$\alpha$  ist der Längenausdehnungskoeffizient. Dieser wird auch als Linearer Ausdehnungskoeffizient

$$[\alpha] = [K^{-1}]$$

Dies gilt für Isotrope Materialien. (Alle Richtungen gleichwertig)

z.B: Gläser, fein kristalline Festkörper

$\alpha$  ist nicht richtungsabhängig

Anisotrope Materialien  $\alpha$  ist richtungsabhängig

z.B: Kristall (Wärmeausdehnung ist von der Kristallachse abhängig)

Exakt:

$$\alpha = \lim_{\Delta T \rightarrow 0} \frac{\Delta l/l}{\Delta T} = \frac{1}{l} \frac{dl}{dT} \quad (5.5)$$

Im Allgemeinen:  $\alpha = \alpha(T)$  d.h. Temperaturabhängig

**Volumenausdehnungskoeffizient (Kubischer Ausdehnungskoeffizient)**

$$\gamma = \frac{\Delta V/V}{\Delta T} \quad (5.6)$$

$$\gamma = \lim_{\Delta T \rightarrow 0} \frac{\Delta V/V}{\Delta T} = \frac{1}{V} \frac{dV}{dT} \quad (5.7)$$

V Volumen

$$\gamma = \gamma(K-1)$$

**Zusammenhang  $\alpha$  und  $\gamma$**

Wir betrachten Quader mit den Längen  $l_1$ ,  $l_2$  und  $l_3$ . Jede Richtung dehnt sich gleich aus.

$$\begin{aligned} V &= l_1 l_2 l_3 \\ \gamma &= \frac{1}{V} \frac{dV}{dT} \\ \frac{dV}{dT} &= \frac{dl_1 l_2 l_3}{dT} = l_2 l_3 \frac{dl_1}{dT} + l_1 l_3 \frac{dl_2}{dT} + l_1 l_2 \frac{dl_3}{dT} \\ \gamma &= \frac{1}{l_1} \frac{dl_1}{dT} + \frac{1}{l_2} \frac{dl_2}{dT} + \frac{1}{l_3} \frac{dl_3}{dT} = 3\alpha \end{aligned}$$

bei isotropen Materialien

$$\gamma = 3\alpha \quad (5.8)$$

	a[K-1]		G[K-1]
Al	$24 \cdot 10^{-6}$	Wasser (Raumtemperatur)	$0.21 \cdot 10^{-3}$
Graphit	$7.9 \cdot 10^{-6}$	Alkohol	$1.1 \cdot 10^{-3}$
Stahl	$11 \cdot 10^{-6}$	Luft	$3.7 \cdot 10^{-3}$

**5.1.6 Anomalie des H<sub>2</sub>O**

Wasser hat sein minimales Volumen bei 4°C. Dies führt dazu, dass Seen immer von oben zu frieren, und deswegen Fische in zugefrorenen Seen überwintern können.

z.B: Gummi zieht sich bei Erwärmung zusammen, da es sich dabei, um sehr lange Moleküle handelt.

## 5.2 Zustandsgleichung idealer Gase

Um ein Gas makroskopisch zu beschreiben verwenden wir folgende 3 Zustandsgrößen:

P	Druck	$[Pa] = [N \cdot m^{-2}] = [m^{-1} \cdot kg \cdot s^{-2}]$
V	Volumen	$[m^3]$
T	Temperatur	$[K]$

Wie der Name schon sagt, beschreiben die Zustandsgleichungen nur einen Zustand eines Gases. Sie beschreiben also nicht den Vorgang, in dem das Gas diesen Zustand erreicht.

### 5.2.1 Gesetz von Boyle (1662) - Mariotte (1676)

Zusammenhang zwischen Druck und Volumen bei konstanter Temperatur.

Experiment: Start Volumen V und Druck P. Druck wird verdoppelt, wie sieht das Volumen aus?

Man beobachtet  $P \cdot V = \text{const.}$  für  $T = \text{const.}$

Auch geschrieben als:

$$P_1 V_1 = P_2 V_2 \quad (5.9)$$

Hyperbel, die man erhält, wenn man T für alle p plottet. Diese Linie ist eine Isotherme

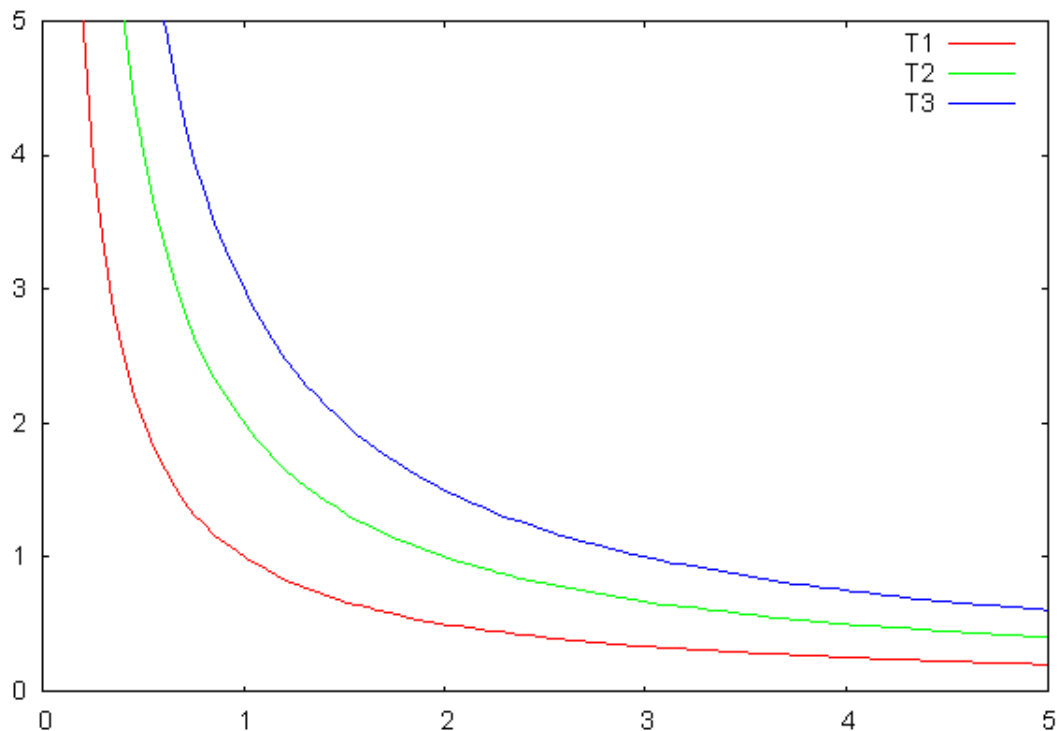


Abbildung 5.1: PV-Diagramm

$$T_3 > T_2 > T_1$$

Also um so weiter eine Isotherme aussen liegt, um so höher ist die Temperatur.

### Linien auf P V Diagramm

Bei dem P V Diagramm stellt man das Volumen auf der x-Achse und den Druck auf der y-Achse da.

Isotherme	Temperatur konstant	$dT = 0$ (bei idealen Gasen $dU = 3/2 n R dT = 0$ )
Isobare	Druck konstant	$dP = 0$
Isochore	Volumenkonstant	$dV = 0$ (bei idealen Gasen $dW = P dV = 0$ )
Adiabte	Kein Wärmeaustausch	$dQ = 0$

Isobare sind horizontale Linien im P V Diagramm. Isochore sind vertikale Linien. Sowohl Isotherme als auch Adiabaten sind Kurven, allerdings sind Adiabten deutlich steiler als Isotherme.

### 5.2.2 Gesetz von Gay-Lussac (1802)

Wenn man den Druck auf einen mit Gas gefüllten Behälter konstant hält, und die Temperatur durch die Zufuhr der Wärme  $Q$  erhöht, beobachtet man eine Ausdehnung des Gases. Experimentell wird ein konstanter Druck dadurch realisiert, dass man das Gas in einem Kolben hat, und dass auf diesem Kolben ein Gewicht der Masse  $m$  ruht. Dieses übt dann einen Druck  $p = (m \cdot g)/A$  aus. Wobei  $A$  die Fläche des Kolbens ist.

Für das Volumen des Gases in abhängigkeit der Temperatur erhält man folgende Experimentelle Beziehung.

$$V_{t_c} = V_0(1 + \alpha \cdot t_c) \quad (5.10)$$

$V_0$  ist das Volumen des Gases bei  $t_c = 0^\circ C$ .  $t_c$  ist hier die Temperatur in Grad Celcius.

Man erhält für stark verdünnte Gase  $\alpha \approx 1/273.15$ .

Technisch: z.B: CO2  $p = 1 \text{ atm}$   $\alpha = 1/268.4$

#### Ideales Gas

Um die Beschreibung von Gasen zu vereinfachen, idealisiert man sie. Man nimmt an, dass die einzelnen Moleküle des Gases punktförmig sind und kein Volumen haben. Man vernachlässigt die Wechselwirkung zwischen den Molekülen. In der Praxis sind stark verdünnten Gase ideale Gase.

#### Reales Gas

Alle nicht idealen Gase sind reale Gase. Bislang haben wir nur ideale Gase betrachtet, und werden es auch erstmal weiter machen.

### 5.2.3 Zustandsgleichung idealer Gases

Wir wollen ein Gesetz, dass ein ideales Gas beschreibt. Um dieses zu erhalten, betrachten wir die Gesetze, die wir bislang kennen gelernt haben, und fügen sie zusammen. Ausserdem verwenden wir das Wissen über den absoluten Nullpunkt, und formen die Celciusskala beim Gesetz von Gay-Lussac in die Kelvinskala um.

$$PV = \text{const.}$$

$$V = V_0(1 + \alpha t_c) = V_0(1 + \frac{t_c}{273.15}) = V_0 \frac{T}{273.15}$$

Annahme:

$$PV = c \cdot T \quad (5.11)$$

Dieser Ansatz ist experimentell bestätigt.

Wir wollen nun wissen wie groß  $c$  ist.

Vergleiche 2 Zylinder mit demselben Druck und Temperatur. Das Volumen ist aber einmal doppelt so gross. Hierdraus folgen wir, dass wir haben doppelt so viel Gas. Wir nehmen also an, dass  $c$



proportional zur Gasmenge ist. Diese drücken wir durch die Anzahl der Moleküle im Gas  $N$  aus. Ausserdem brauchen wir, noch eine Konstante. Diese wurde von Ludwig Boltzmann eingeführt, und wurde nach ihm Boltzmann Konstante  $k_B$  benannt. Experimentel wissen wir, dass diese unabhängig von der Art des Gases ist.

$N$  ... Zahl der Moleküle

$k_B$  ... Boltzmann Konstante (unabhängig von der Art des Gases)

$$k_B = 1.38110^{-23} J/K$$

$$PV = Nk_B T \quad (5.12)$$

$PV$  = Druck \* Volumen = Kraft / Fläche \* Volumen = Kraft \* Weg = Arbeit  
Arbeit, die das System verrichtet:  $\Delta(PV)$

Leider ist die Anzahl der Moleküle in einem Gas eine ziemlich unhandliche Zahl, deswegen führen wir das Mol ein.

#### 5.2.4 Mol

Das Mol ist ein Mass für die Stoffmenge. Es gibt die Masse von  $N_L$  Molekülen an. Bei  $^{12}C$  entspricht dies 12g. Bei den anderen Atomen gibt es minimale Abweichungen auf Grund des Massendefektes. Masse in gramm = Molekulargewicht.

$N_L$  Loschmidt Konstante, Avogadrokonstant Zahl der Moleküle in einem Mol.

$$\begin{aligned} N_L &= 6.02210^{23} / mol \\ Nk_B &= nN_L k_B \\ N &= nN_L \\ N_L k_B &= R \text{ Allgemeine Gaskonstante} \\ R &= 8.3 J/mol/K \end{aligned}$$

#### 5.2.5 Allgemeines Gasgesetz

Wir haben jetzt also, ein Gesetz, dass einen Zustand eines idealen Gases beschreibt.

$$PV = nRT \quad (5.13)$$

Molvolumen: Volumen eines Mols eines Gases bei  $p = 1 \text{ atm}$  und  $T = 0^\circ C = 273.15 \text{ K}$  (Standardbedingungen)  $V_m = 22.4l$

Alternativ für Standardbedingungen:  $p = 1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}$

$1 \text{ atm} = 1.013 \text{ bar}$

#### 5.2.6 Reale Gase

Wir können den Zustand idealer Gase, jetzt beschreiben. Wie sieht es aber mit realen Gasen aus? Hier müssen wir die Wechselwirkung der Moleküle im Gas berücksichtigen. Diese wird verursacht durch die Anziehung durch induzierte elektrische Dipole im Gas.

Diese ist im Allgemeinen positiv. Also müssen die Moleküle Arbeit gegeneinander verrichten. Wegen dieser Anziehung, werden die Moleküle näher zusammen sein.

Volumen zu gross  $V \rightarrow V - b * n$

Druck zu klein  $p \rightarrow p + a \frac{n^2}{v^2}$

1.  $\frac{n}{v}$  proportionale Dichte Anziehung
2. Zahl, die auf die Wand trifft proportional  $\frac{n}{v}$

### 5.2.7 Van der Waals-Gleichung

$$(P - a \frac{n^2}{V^2})(V - bn) = nRT \quad (5.14)$$

a und b sind material Grössen. Diese sind empirisch zu bestimmen.

V sehr gross => Ideale Gasgleichung

Es entstehen Isotherme ... Durch die Verflüssigung entstehen lokale Maxi und Minimas .... In diesem Intervall: Gas / flüssig Gemisch.

3 Bereiche: F, G/F, G (Im Fall von Wasser: Dampf)

G/F: Gas und Flüssigkeit sind im Gleichgewicht. Druck bei diesem Gleichgewicht: Dampfdruck  $p_D$  (Dieser ist Temperatur abhängig)

### Überhitzter Dampf

Gas ist so heiß, dass man sie nicht durch Verkleinerung des Volumens verflüssigen kann.

### Kritische Punkt

Bei kritischer Temperatur TK: Gas und Flüssigkeit haben die gleiche Dichte. Bei Beleuchtung eines Behälters in diesem Zustand: kritische Opaleszenz.

## 5.3 Kinetische Gastheorie

Zur Beschreibung des Zustandes eines Gas haben wir die Makroskopische Grössen P, V, T benutzt. Wir wissen auch, dass das Gas aus einzelnen Molekülen besteht. Wir wollen Gase nun durch die Bewegung der einzelnen Molekülen verstehen. Wir wissen, dass jedes Molekül an der Position  $\vec{r}_i$  mit dem Impuls  $\vec{p}_i$  ist.

Der Druck P wird in einem Gas, durch Stöße auf die Behälterwand der Moleküle verursacht.

$$\begin{aligned} \vec{F} &= \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} \\ P &= \frac{F}{A} = \frac{1}{A} \frac{\Delta p}{\Delta t} \end{aligned}$$

Wir betrachten nur die Normalkomponente auf die Oberfläche, und auch nur in eine Richtung. Aus dem 3. Newtonsches Axiom wissen wir, dass Kraft gleich Gegenkraft ist. Also wenn ein Molekül auf die Behälterwand trifft, und wieder abprallt, überträgt es seinen doppelten Impuls auf die Wand.

$$\Delta p = 2mv_x \text{ pro Molekül}$$

Wir wissen jetzt, welchen Impuls ein einzelnes Molekül überträgt. Wie viele Teilchen treffen auf die Einheitsfläche in der Zeiteinheit?

Wir haben N Moleküle in dem Volumen V. Wenn wir annehmen, dass diese gleichmässig verteilt sind, und alle eine feste Geschwindigkeit  $v_x$  haben. Dann legen die einzelnen Moleküle den Weg  $x = \Delta t \cdot v_x$  zurück. Also erhalten wir für alle Moleküle folgende Beziehung, für die Anzahl der Teilchen, die auf die Behälterwand pro Zeiteinheit treffen.

$$\frac{1}{A} \frac{1}{\Delta t} = \frac{1}{2} \frac{N}{V} \cdot v_x \quad (5.15)$$

Wir nehmen den Betrag von  $v_x$ , da die Hälfte der Teilchen von der Wand wegfliegen.

$$\Rightarrow P = \frac{1}{2} \frac{N}{V} v_x 2mv_x = \frac{N}{V} mv_x^2 \quad (5.16)$$

Druck bei einer festen Geschwindigkeit  $v_x$

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$$

Mittelwert  $\langle v^2 \rangle = \langle v_x^2 \rangle + \langle v_y^2 \rangle + \langle v_z^2 \rangle$

Unter der Annahme, dass das Gas isotrop ist. Das heisst, dass alle Richtungen sind gleich:

$$\langle v_x^2 \rangle = \langle v_y^2 \rangle = \langle v_z^2 \rangle = 1/3 \langle v^2 \rangle \quad (5.17)$$

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{3} \frac{N}{V} \langle v^2 \rangle \\ E_{Kin} &= \frac{mv^2}{2} \\ \langle E_{Kin} \rangle &= \frac{m \langle v^2 \rangle}{2} \\ \langle v^2 \rangle &= \frac{2}{m} E_{Kin} \\ PV &= \frac{2}{3} N \langle E_{Kin} \rangle \\ PV &= N k_B T \\ \langle E_{Kin} \rangle &= \frac{3}{2} k_B T \end{aligned}$$

Wir sehen hier, dass die Temperatur ist ein Mass für die kinetische Energie ist. Dies haben wir schon ganz am Anfang gesagt. Aber erst durch diesen Zusammenhang können wir dies beweisen.

### 5.3.1 Relation Geschwindigkeit der Moleküle / Temperatur

$$\begin{aligned} \langle E_{kin} \rangle &= \frac{3}{2} k_B T \\ \langle E_{kin} \rangle &= \frac{1}{2} \langle mv^2 \rangle = \frac{m}{2} \langle v^2 \rangle \\ \langle v^2 \rangle &\neq \langle v \rangle^2 \end{aligned}$$

Wir bezeichnen eine neue Geschwindigkeit  $v_{rms}$  rms = root main square.

$$v_{rms} = \sqrt{\langle v^2 \rangle}$$

### 5.3.2 Geschwindigkeitsverteilung

Moleküle mit Temperatur T können durch ein kleines Loch aus einem Behälter austreten. Diese fliegen auf 2 Zahnräder mit versetzten Zahnredern auf einer gemeinsamen drehenden Welle. Es kommen nur Teilchen mit einer bestimmten Geschwindigkeit durch. Dieses Gerät heisst Geschwindigkeitsselektor. Man misst die durchgelassenen Teilchen bei einer Drehgeschwindigkeit. Man erhält eine Geschwindigkeitsverteilung, aufgezeichnet:

$v$  ... Geschwindigkeit

$f(v)$  ... Anzahl der Teilchen mit Geschwindigkeit  $v$

Graph steigt vom Nullpunkt zu einem Maximum, und geht dann aximtotisch gegen die x-Achse.

Siehe hier<sup>1</sup>

<sup>1</sup><http://www.physik.rwth-aachen.de/group/IIIphys/INFOS/Exscript/11Kapitel/XI3Kapitel.html>

$\Delta N(v) = N f(v) \Delta v$   
 $f(v)$  Wahrscheinlichkeitsfunktion  
 $\int_0^\infty f(v) dv = 1$   
 Exakt:  $dN(v) = N f(v) dv$   
 Dies ist die Maxwell-Boltzmann Verteilung

$$f(v) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{m}{2k_B T} \right)^{\frac{3}{2}} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2k_B T}} \quad (5.18)$$

$$\text{Kleine } v \dots f(v) \sim v^2$$

$$\text{Große } v \dots f(v) \sim e^{-v^2}$$

$$v_{max} = \sqrt{\frac{2k_B T}{m}}$$

$$\frac{mv_{max}^2}{2} = k_B T$$

$$\frac{m \langle v^2 \rangle}{2} = \frac{3}{2} k_B T$$

$$v_{rms} = \sqrt{\frac{3}{2}} v_{max}$$

### 5.3.3 Brownsche Molekularbewegung

Experiment 1828. Pollen in einer Flüssigkeit unterm Mikroskop betrachtet. Bemerkte, dass die Polen herumzittern. Dies resultiert aus der kinetischen Gastheorie. Wasserteilchen hat circa eine Geschwindigkeit von wenigen mm pro Sekunde.

Die Molekularbewegung ist ein *Random Walk* (im Zick-Zack).

Abhängigkeit von Weg des Teilchens mit der Zeit

$$x^2 \sim t$$

### 5.3.4 Diffusion

Behälter (gennant *Diffusionszelle*). 2 Flüssigkeiten. Eine rechts, eine links. Durch Molekularbewegung verschwimmt die Grenze zwischen den beiden Flüssigkeiten. Nachdem man lange genug gewartet hat, ist die Flüssigkeit gleichmässig verteilt. Dieser Prozeß ist nur auf Grund der Wärmebewegung der Teilchen zu verstehen.

$$j = D \frac{dn}{dx} \quad (5.19)$$

$j$  ... Teilchenstrom (Zahl der Teilchen, die Prozeiteinheit, und pro Fläche, die durch die Trennfläche durchtreten) Netto!!

$\frac{dn}{dx}$  ... Dichtegradient.

$D$  ... Diffusionskoeffizient [ $m^2 s^{-1}$ ] (abhängig von Masse, Grösse und Temperatur der Teilchens)

### 5.3.5 Osmose

Wir haben eine semipermeable Wand (Wand, die nur gewisse Arten von Molekülen durchlässt. z.B. Zellmembranen)

#### Partialdruck

Wir haben ein **Gasgemisch** oder **Flüssigkeitsgemisch**. Der Partialdruck ist der Druck, der von einem bestimmten Gas alleine ausgeübt wird. Gesamtdruck ist die Summe der Partialdrücke.

**Gesetz von Dalton**

Der Partialdruck eines Gases ist unabhängig von anderen.

Wir haben eine semipermable Wand. Auf einer Seite ist  $H_2O$  und auf der anderen  $H_2O + NaCl$ . Osmose: Diffusion durch eine semipermable Wand, findet statt bis die Partialdrücke auf beiden Seiten der Wand gleich ist.

Aus diesem Grund verwendet man bei medizinischen Behandlungen eine *physiologische Kochsalzlösung* mit  $9gNaCl/l$ , hat gleichen Partialdruck wie in den Zellen. Auch bezeichnet als *isotonisch*.

**5.4 I. Hauptsatz**

Historisch:

**17. Jahrhundert: Galile, Newton:** Annahme von einem Wärmestoff (Caloricum). Dieser Stoff fließt bis ein Gleichgewicht erreicht ist, von einem warmen bis zu einem kalten Reservoir. Dieser Wärmestoff bleibt erhalten.

**Wärme kann durch Reibung erzeugt werden.** Hinweis Wärme hängt mit mechanischer Energie zusammen.

Ende des 18. Jahrhundert: **Benjamin Thompson, später Lord Rumford** in einer bayrischen Waffenfabrik, wo man Kanonen bohrte. **Beobachtung** bei stumpfen Bohrer wird die Kanone genauso heiss wie mit einem scharfen. Festgestellt, dass die erzeugte Wärmemenge proportional zur hineingesteckten Arbeit ist, aber nur sehr grob.

**James Joule (1818-1889)** Nachgewiesen genauer quantitativer Zusammenhang zwischen Arbeit und Wärmemenge.

**Experiment:** Wir haben einen Wasserbotich, in dem sich ein Rührer befindet, der über ein Seil, an dem ein Gewicht  $M$  befestigt ist, in Bewegung versetzt wird. Die Gewichte gehen  $h$  nach unten. So wird durch die Bewegung des Rührers dem Wasser Energie zugeführt. Dem System wurde die Arbeit  $W = M \cdot g \cdot h$  zugeführt. Man sieht die mechanische Energie ist proportional zur Temperaturerhöhung.

Das heisst es macht Sinn von einer Wärmeenergie zu sprechen. Hier für verwenden wir  $Q$ . Die innere Energie  $U$  eines Gases besteht aus der Kinetischen Energie der Moleküle und der Energie auf Grund der Wechselwirkung zwischen den Molekülen.

$$\Delta U = Q + W \quad (5.20)$$

Diese Formel nennen man den **ersten Hauptsatz der Wärmelehre**. Sie bedeutet, dass die Änderung der inneren Energie eines Stoffes immer auf Wärmezufuhr oder Arbeitszufuhr zurückzuführen ist.

**5.4.1 Innere Energie des Idealen Gases**

$$\begin{aligned} E_{Kin} &= \frac{3}{2} \cdot N \cdot k_B \cdot T \\ E_{Kin} &= \frac{3}{2} \cdot n \cdot R \cdot T \end{aligned}$$

Ideales Gas hat keine Wechselwirkung der Moleküle. Deswegen besteht die innere Energie ausschliesslich aus der kinetischen Energie der einzelnen Moleküle.

$$U = E_{Kin} = \frac{3}{2} \cdot n \cdot R \cdot T \quad (5.21)$$

**Gedankenexperiment:** 2 Behälter, die mit einer Leitung verbunden sind. In einem ist ein Gas im anderen Vakuum.

**Ideales Gas**

Beim öffnen des Ventils strömt das Gas ins Vakuum. Da es keine Wechselwirkung gibt, wird keine Arbeit verrichtet.  $\Delta U = 0$  und  $T = \text{const.}$  **keine Temperaturänderung.**

**Reales Gas**

Wir haben eine Wechselwirkung zwischen den Molekülen.  $\Delta U \neq 0$ . Es muss Arbeit gegen die Wechselwirkung verrichtet werden. Es kommt zu einer Temperaturniedrigung. Dies ist der **Joule-Thompson-Effekt**.

**5.4.2 Wärmekapazität**

Um einen Körper, um die Temperatur  $\Delta T$  zu erwärmen, ist eine bestimmte Wärmemenge  $Q$  nötig.

$$Q = C \cdot \Delta T \quad (5.22)$$

**C:** Wärmekapazität eines Körpers.

Da wir kein besonderes Interesse haben, für jeden Körper eigene Konstanten zu haben, und die Proportionalität zwischen Masse eines Körpers und benötigter Wärme offensichtlich ist, erhalten wir:

$$Q = m \cdot c \cdot \Delta T \quad (5.23)$$

**m:** Masse

**c:** spezifische Wärme. Dies ist eine Materialeigenschaft (meistens sogar noch temperaturabhängig).

Einheiten:  $Q$ : [J]  $m$ : [kg]  $T$ : [K]

Dimension von  $c$ : [ $J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}$ ]

**Alte Wärmeeinheit:** 1 cal (Kalorie) Wärmeenergie, um 1 g Wasser von  $14.5^\circ C$  auf  $15.5^\circ C$  zu erwärmen.

$c_{H_2O} = 1 \text{ cal/g}^\circ C$  bei  $15^\circ C$ .

$$1 \text{ cal} = 4.18 \text{ J} \quad (5.24)$$

Dies ist das mechanische Wärmeäquivalent.

**Kalorimeter** Gerät zum bestimmen der spezifischen Wärme.

**5.4.3 Phasenübergänge und Latente Wärme**

Wir haben ein Stück Eis in einem Becher. Wir führen konstant Energie zu. Temperatur geht als erstes gegen Null, dann bleibt sie konstant (Schmelzen), dann geht sie gegen  $100^\circ C$ , dann bleibt sie ungefähr sieben Mal so lang konstant (Verdampfen), und dann steigt sie weiter.

Die für einen Phasenübergang benötigte Wärme nennt man Latente Wärme (Schmelz- und Verdampfungswärme).

$$Q = m \cdot Q_s \quad (5.25)$$

$Q_s$  Schmelzwärme / kg

$$Q = m \cdot Q_v \quad (5.26)$$

$Q_v$  Verdampfungswärme / kg

**5.4.4 Spezifische Wärme idealer Gase**

$$dQ_v = C_v dT \quad (5.27)$$

Wir nehmen an das Volumen des Gases ist konstant. Die zugeführte Wärme geht in die innere Energie.  $Q \rightarrow U$

Alternativ: Druck ist konstant. Volumen ist veränderlich. Das System verrichtet Arbeit nach außen.

1.  $V = \text{const}$ 

$$\begin{aligned}
 V &= \text{const} \\
 dW &= 0 \\
 dU &= dQ + dW \\
 C_v &= \frac{dU}{dT} \\
 dU &= C_v dT \\
 Q &= C \Delta T = n c \Delta T
 \end{aligned}$$

2.  $P = \text{const}$ 

$$\begin{aligned}
 dW &= -PdV \\
 dQ &= dU - dW \\
 C_p \cdot dT &= dQ_P = dU + PdV \\
 PV &= nRT \\
 PdV &= nRdT \\
 C_p \cdot dT &= C_v dT + nRdT \\
 C_p &= C_v + nR \\
 C_p &= n c_p \\
 C_v &= n c_v \\
 c_p &= c_v + R \\
 C_v &= \frac{dU}{dT} \\
 U &= \frac{3}{2} N k_B T = \frac{3}{2} nRT \\
 C_v = \frac{dU}{dT} &= \frac{3}{2} nR \\
 C_p &= C_v + nR
 \end{aligned}$$


---

Wärmekapazität	$C_p = \frac{5}{2} nR$
	$C_v = \frac{3}{2} nR$

---

spezifische Wärme pro Mol	$c_p = \frac{5}{2} R$
	$c_v = \frac{3}{2} R$

Diese Formeln gelten nur für ideale Gase.

### 5.4.5 Allgemein: Innere Energie pro Freiheitsgrad

Bei der Translation (linear Bewegung): 3 Freiheitsgrade (x, y, z). Ein ideales Gas hat nur diese 3 Freiheitsgrade ( $f = 3$ ).

$$U = f/2 * nRT \quad (5.28)$$

Bei komplizierteren Molekülen: Rotation (x,y,z). Bei zwei atomigen Molekülen (z.B.  $N_2$ ) hier ist es nur sinnvoll, von 2 Rotationen zu sprechen. Man spricht von angeregten Freiheitsgraden.  $\Rightarrow f = 5$

$$U = \frac{5}{2} nRT$$

Es gibt auch noch Schwingungsfreiheitsgrade.

### 5.4.6 Wärmeübertragung

#### Wärmeleitung

Wir haben zwei **Reservoirs** (Temperatur ist konstant) mit den Temperaturen  $T_1, T_2$ . Wenn  $T_1 > T_2$ , und die zwei Reservoirs verbunden sind, wird Wärme vom wärmeren zum kälteren fließen. Es kommt zu einem Wärmestrom  $I$ .  $[I] = [Js^{-1} = [W]$ .

$$\begin{aligned}\Delta T &: \text{Temperaturunterschied} \\ \Delta x &: \text{Abstand} \\ A &: \text{Querschnitt} \\ \lambda &: \text{Wärmeleitfähigkeit, Wärmeleitungskoeffizient} \\ I &= \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \lambda A \frac{\Delta T}{\Delta x} \\ [\lambda] &: [Wm^{-1}K^{-1}] \\ I &= \frac{dQ}{dt} \\ I &= \lambda A \frac{dT}{dx}\end{aligned}$$

$\lambda$  Materialeigenschaft

$\lambda$  kann von der Richtung abhängen. z.B.: in einem Kristall.

$\lambda$  ist Isotrop bei Gasen, Flüssigkeiten, Glas, multikristalliner Festkörper.

$\lambda$  ist Anisotrop in Kristallen, Holz.

$$\lambda_{Metall} \gg \lambda_{Nichtmetalle} \quad (5.29)$$

Temperaturempfindung hängt stark von der Wärmeleitfähigkeit ab.  
Effekt wird bei Grubenlampen genutzt.

#### Konvektion

Wärmetransport durch Materialtransport.

#### Wärmestrahlung

Hier passiert der Wärmetransport durch Strahlung: **Elektromagnetische Wellen**.

#### Stefan-Boltzmann-Gesetz

$$\frac{E}{t \cdot A} = \epsilon \sigma T^4 \quad (5.30)$$

$\sigma$  **Stefan-Boltzmann-Konstante**.  $\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8} Wm^{-2}K^{-4}$   
 $0 \leq \epsilon \leq 1$  **Emissionskoeffizient** (Materialeigenschaft)

A: Fläche

T: Temperatur

E: Energie

t: Zeit

#### Schwarzer Körper

Ein idealer Strahler hat  $\epsilon = 1$ . Dies ist ein Schwarzer Körper (Körper der alle Strahlung absorbiert).

Ein schwarzer Körper absorbiert Alles (Maximal).

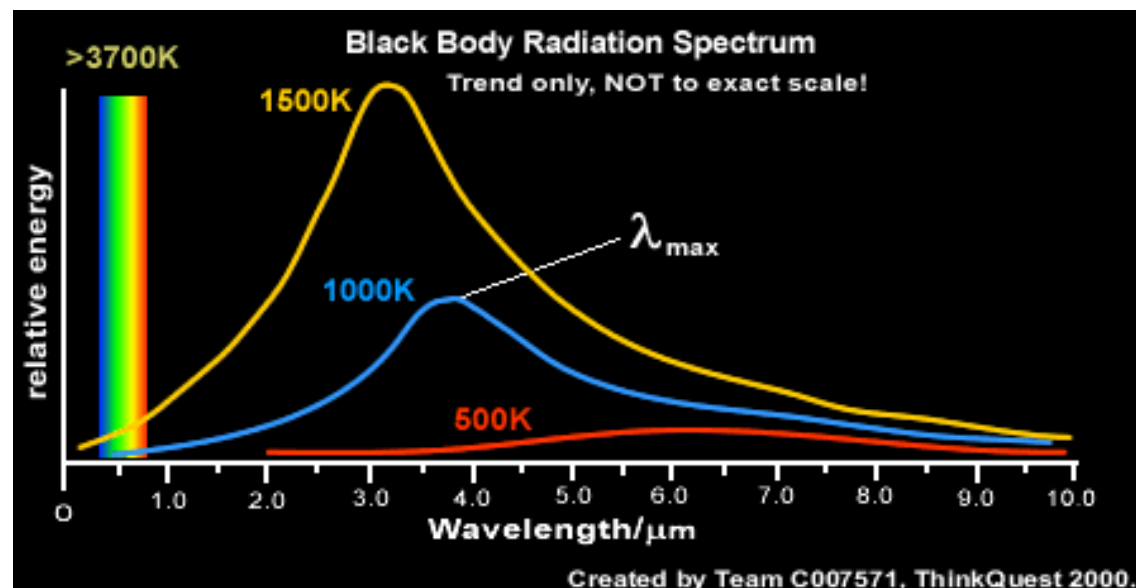


$T_{Anstieg} \rightarrow$  Emission steigt  $\rightarrow$  Gleichgewicht, es wird wieder das Maximum abgestrahlt (alles).

**Realisierung eines schwarzen Körpers:** Hohlraum (von Kirchhoff 1870). In diesem wird sich ein Gleichgewicht zwischen absorbierter und emittierter Strahlung einstellen. Diese Gleichgewichtsstrahlung ist identisch mit der Strahlung des schwarzen Körpers. **Experimental beobachtet** durch ein kleines Loch, der Hohlraum wird auf konstanter Temperatur gehalten. Durch das Loch wird das Gleichgewicht nicht merklich gestört.

### Hohlraumstrahlung

Experimentell: Hohlraumstrahlung ist nur von der Temperatur anhängig. Bestimmt durch Wien-



sches Verschiebungsgesetz.  $\lambda_{Max} \cdot T = const$

$$\lambda_{Max}[mm] = \frac{3}{T[K]} \quad (5.31)$$

**3 Kelvin Hintergrundstrahlung** Entdeckt von Penzias, Wilson mit einem sehr präzisen Radioteleskop. Dieses registriert immer eine gewisse Strahlung. Diese Strahlung hat immer eine Temperatur von 3 Kelvin  $\lambda mm$ . Deutung dieser Strahlung: Sie ist ein Überbleibsel vom Urknall. Diese ist beim Urknall entstanden hatte circa  $T \approx 10^8 K$ , bei der Ausdehnung des Universums kam es zu einer Adiabatischen Abkühlung.

### Planksches Wirkungsquantum

Max Plank 1900, zeigte Strahlungsgesetz kann nicht mit Wellentheorie erklärt werden. Licht besteht aus Quanten (unteilbare Dinge), heute als Photonen bezeichnet.

$$E = h \cdot \nu \quad (5.32)$$

$$h = 6.6 \cdot 10^{-34} Js$$

### Anwendung der Wärmestrahlung

Thermographie: Bilder auf Grund von Temperaturstrahlung: Infrarotsichtgerät.

### 5.4.7 Adiabatische Zustandsänderung

**System ist thermisch isoliert.** Es kann keine Wärmeenergie abgegeben werden noch aufgenommen werden.

$$\begin{aligned}dQ &= 0 \\dQ &= dU + PdV \\0 &= dU + PdV \\dU &= -PdV\end{aligned}$$

Adiabatisch bedeutet ohne Wärmeaustausch ( $\Delta Q = 0$ ).

#### Adiabatische Kompression

→ Erwärmung.

Schnelle Prozesse sind adiabatisch, weil es keine Zeit zum Wärmeaustausch gibt.

$$\begin{aligned}dU + PdV &= 0 \\dU &= C_v dT\end{aligned}$$

weil Erhöhung der kinetischen Energie, muss unabhängig vom Prozess sein

$$\begin{aligned}C_v dT + PdV &= 0 \\PV &= nRT \\C_v dT + nRT \frac{dV}{V} &= 0 \\\frac{dT}{T} + \frac{nR}{C_v} \frac{dV}{V} &= 0 \\C_p &= C_v + nR \\nR &= C_p - C_v \\\frac{nR}{C_v} &= \frac{C_p - C_v}{C_v} \\\kappa(\gamma) &= \frac{C_p}{C_v} = \frac{c_p}{c_v}\end{aligned}$$

Wie führen hier  $\kappa$  den Adiabatenkoeffizient ein.

$$\begin{aligned}\frac{C_p - C_v}{C_v} &= \kappa - 1 \\C_v &= n \cdot R \cdot \frac{f}{2} \\\kappa &= \frac{nR \frac{f}{2} + nR}{nR \frac{f}{2}} \\\kappa &= \frac{f + 2}{f} \\\frac{dT}{T} + (\kappa - 1) \frac{dV}{V} &= 0 \\\ln T + (\kappa - 1) \ln V &= \text{const} \\\ln T + \ln V^{\kappa-1} &= \text{const} \\\ln(T \cdot V^{\kappa-1}) &= \text{const} \\T &= \frac{PV}{nR} \\\ln \frac{PV^\kappa}{nR} &= \text{const} \\PV^\kappa &= \text{Konst}\end{aligned}$$

Adiabatengleichung:

$$PV^\kappa = \text{const} \quad (5.33)$$

## 5.5 2. Hauptsatz

Frage Wieviel Wärmeenergie kann man in mechanische Energie verwandeln?

Wir wissen, dass mechanische Energie durch Reibung vollständig in Wärmeenergie verwandelt werden kann. Um dies zu untersuchen, betrachten wir Maschinen, die dies machen:

### 5.5.1 Dampfmaschine

#### Funktionsweise

- Eine Wärmemenge  $Q$  wird dem System zugeführt.
- Mechanische Energie  $W$  wird gewonnen.
- Wärmemenge  $Q_k$  wird dem System entzogen.

#### Andere Darstellung

Wärmekraftmaschine arbeitet zwischen 2 Temperaturreservoirs bei Temperaturen  $T_W, T_K$ . Wir entnehmen dem warmen Reservoir die Wärmemenge  $Q_W$ , zweige die Arbeit  $W$  ab, und es fließt die Wärmemenge  $Q_K$  in das kalte Reservoir.

#### Wirkungsgrad $\eta$ / $\epsilon$

Der Wirkungsgrad einer Wärmemaschine ist der Prozentsatz der Wärmeenergie, die in mechanische Energie umgewandelt wird.

$$\eta = \left| \frac{W}{Q_W} \right| \quad (5.34)$$

Ideal  $\eta = 1$ . Dies ist im Prinzip unmöglich.

Es gibt auch keine Maschine, die Wärme von einem kalten auf einen warmen Körper übertragen kann, ohne dass mechanische Arbeit verloren geht.

### 5.5.2 Irreversibilität

Es gibt viele Prozesse in der Natur, die irreversibel sind. Also, die nicht wieder rückgängig gemacht werden können. Wenn wir zum Beispiel Zucker in Tee kippen, dann durchmischt sich das Ganze (und wird ungenießbar). Es kann aber nicht passieren, dass wir Tee mit Zucker haben, und dieser sich wieder in Tee und Zucker trennt.

z.B.: Zucker, Milch in Kaffee, ..., Lichtmühle

#### Nochmal Wärmemaschinen

Bei normalen Wärmemaschinen gilt, dass die entnommene Arbeit  $W$ , gleich der Differenz zwischen der vom wärmeren Reservoir abgeführten Wärme  $Q_W$  und der an das kältere Reservoir abgegebenen Wärme  $Q_K$  ist. Also  $W = Q_W - Q_K$ . Und für den Wirkungsgrad  $\eta$  gilt nun:

$$\eta = \left| \frac{W}{Q_W} \right| = \left| \frac{Q_W - Q_K}{Q_W} \right| = \left| 1 - \frac{Q_K}{Q_W} \right| \quad (5.35)$$

Definition: Wir verwenden nur noch die Beträge:  $\eta = 1 - \frac{Q_K}{Q_W}$

### Kältemaschinen

Umgekehrte Situation. Entnehmen kälteren System Wärme  $Q_K$  mit Hilfe der Arbeit  $W$ , und stecken, dann die Wärme  $Q_W$  in das wärmere System.  $W$  sollte so klein wie möglich sein.

#### 5.5.3 2. Hauptsatz nach Clausius (1850)

Es ist unmöglich eine zyclische arbeitende Maschine zu bauen, die Wärme vom kälteren zum wärmeren Reservoir ohne einen anderen Effekt zu haben.

#### Wirkungsgrad einer Kältemaschine / Leistungszahl

$$\eta = \frac{Q_K}{W} \quad (5.36)$$

Dieses  $\eta$  kann grösser als 1 sein.

#### 5.5.4 Grenzen für den Wirkungsgrad

Wir betrachten reversible Prozesse:

1. Keinen Verlust durch Reibung (keine Umwandlung von Energie in Reibung, keine Viskosität)
2. Keine Wärmeleitung auf Grund von endlicher Temperaturdifferenzen.
3. Keine turbulente Gasströmungen, oder Expansionen in ein Vakuum.

#### Prinzip von Carnot

Zwischen zwei Reservoiren hat die reversibel arbeitende Wärmekraftmaschine den höchsten Wirkungsgrad.

Alle reversibel arbeitenden Wärmekraftmaschinen haben den gleichen Wirkungsgrad: den Maximalen.

**Beweis:** Wärmekraftmaschine entnimmt 100J aus dem wärmeren Reservoir mit der Temperatur  $T_W$ . Diese Maschine entnimmt 40 J mechanische Arbeit. Es fließen 60J in das kältere Reservoir mit der Temperatur  $T_K$ .

Die Annahme ist reversibel.

Kältemaschine entnimmt aus dem kälteren Reservoir 60J, steckt 40J Energie hinein, und führt dem wärmeren Reservoir 100J hinzu. (Umkehrung der Wärmemaschine).

Annahme es gäbe eine Maschine mit höherem Wirkungsgrad. Zum Beispiel, die 50 J abgibt.

Jetzt schalte ich die beiden Maschinen zusammen.  $\Rightarrow$  Wir entnehmen dem kälteren Reservoir 10 J, und werden zu mechanischer Arbeit. Dies widerspricht dem 2ten Hauptsatz.

#### 5.5.5 2. Hauptsatz nach Kelvin

Keine Wärmemaschine aus der Umgebung entnehmen und vollständig in Arbeit verwandeln.

Alternativ gibt es das Ganze noch von Planck und Thomson.

## 5.5.6 Carnotscher Kreisprozeß

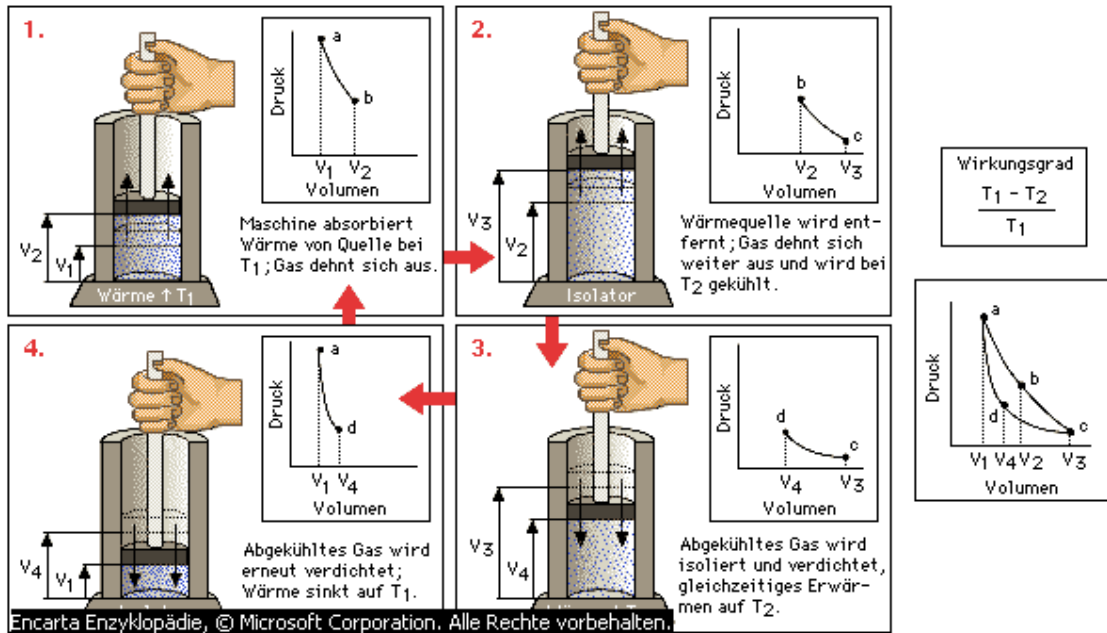


Abbildung 5.2: Carnotscher Kreisprozess

Der Carnotsche Kreisprozeß ist gleich, der Summe seiner einzelnen Prozesse. Es wird die Arbeit unter den Prozessen abgegeben, bzw. aufgenommen.

Wir gewinnen bei  $a \rightarrow b$  und  $b \rightarrow c$  Arbeit.

Bei  $c \rightarrow d$  und  $d \rightarrow a$  entnehmen wir Arbeit.

Arbeit an Umgebung:  $W = \underbrace{W_{ab} + W_{bc}}_{\text{positiv}} + \underbrace{W_{cd} + W_{da}}_{\text{negativ}}$

- $a \rightarrow b$  Isotherme Expansion. Stecken  $Q_W$  hinein.
- $b \rightarrow c$  Adiabatische Expansion.  $\Delta Q = 0$   $T_W \rightarrow T_K$
- $c \rightarrow d$  Isotherme Kompression. Führen  $Q_K$  ab.
- $d \rightarrow a$  Adiabatische Kompression.  $\Delta Q = 0$   $T_K \rightarrow T_W$

$$\eta = \frac{W}{Q_W} = \frac{Q_W - Q_K}{Q_W} = 1 - \frac{Q_K}{Q_W}$$

$$a \rightarrow b : Q_W = -W_{ab}$$

U ändert sich nicht.

$$PV = nRT_W$$

$$Q_W = \int_a^b P dV = \int_a^b nRT_W \frac{dv}{V}$$

$$Q_W = nRT_W \ln \frac{V_b}{V_a}$$

$$\text{Analog } c \rightarrow d : Q_K = \int_d^c P dV = nRT_K \ln \frac{V_c}{V_d}$$

### 5.5.7 Adiabaten

$PV^\kappa = \text{const.}$  aus  $PV = nRT \Rightarrow P = \frac{1}{V}nRT$   
 $TV^{\kappa-1} = \text{const}$  für einen Prozess

- $b \rightarrow c: T_W \cdot V_b^{\kappa-1} = T_K V_c^{\kappa-1}$
- $d \rightarrow a: T_K \cdot V_d^{\kappa-1} = T_W V_a^{\kappa-1}$

$$\begin{aligned} T_W \cdot V_a^{\kappa-1} &= T_K V_d^{\kappa-1} \\ T_W \cdot V_b^{\kappa-1} &= T_K V_c^{\kappa-1} \\ \frac{V_a^{\kappa-1}}{V_b^{\kappa-1}} &= \frac{V_c^{\kappa-1}}{V_d^{\kappa-1}} \\ \frac{V_b}{V_a} &= \frac{V_c}{V_d} \\ \eta &= 1 - \frac{Q_K}{Q_W} = 1 - \frac{T_K}{T_W} \end{aligned}$$

### 5.5.8 Wirkungsgrad

Der Wirkungsgrad einer reversiblen thermodynamischen Maschine:

$$\eta = 1 - \frac{T_K}{T_W} \quad (5.37)$$

Dies bedeutet, dass um so höher die Temperatur  $T_W$  ist, um so höher ist der Wirkungsgrad. Genauso damit, dass bei einer niedrigeren Temperatur  $T_K$  der Wirkungsgrad steigt. Man sieht auch, dass bei kleinen Temperaturunterschieden zwischen  $T_K$  und  $T_W$  der Wirkungsgrad gegen 0 geht.

## 5.6 3. Hauptsatz

Der 3. Hauptsatz der Thermodynamik besagt: **Der absolute Nullpunkt ist unerreichbar.**

Alle spezifischen Wärmen gehen nach Null beim Nullpunkt. D.h. am absoluten Nullpunkt braucht man keine Energie, um einen Stoff zu erwärmen.

Die Definition des absoluten Nullpunkt, ist dass eine Wärmekraftmaschine, die ab diesem arbeitet, einen Wirkungsgrad von  $\eta = 0$  hätte.

Ausserdem würde nach dem idealen Gasgesetz bei  $T = 0$  gelten, dass das Volumen und der Druck gleich Null wären. Dies ist auch unmöglich.

## 5.7 Wärmemaschinen

### 5.7.1 Perpetuum Mobile

Informationen zu PMs gibt es hier<sup>2</sup>

#### 1. Art

Verletzt den 1. Hauptsatz oder die Energieerhaltung. Dies bedeutet, dass es Energie aus dem Nichts gewinnt. Dies sind zum Beispiel diverse Radkonstruktionen, die sich immer weiter drehen sollten.

<sup>2</sup><http://www.hp-gramatke.de/perpetuum/index.htm>

**2. Art**

Verletzt den 2. Hauptsatz.

**5.7.2 Heizluftmotor / Stirlingmotor**

Wir benutzen kein Brennmittel, sondern nur heiße Luft.

Er funktioniert mit einem Zyklus:

1. Isotherme
2. Isochore
3. Isotherme
4. Isochore

Genauere Informationen gibt es hier<sup>3</sup>, hier<sup>4</sup> und hier<sup>5</sup>

**quasi-statisch**

Ein Prozess läuft so langsam ab, dass die 3 Reversibilitätsbedingungen erfüllt sind. (Dies macht kein realer Prozess)

**5.7.3 Definition der absoluten Temperatur**

Man benutzt den Wirkungsgrad einer Maschine, um den absoluten Nullpunkt zu definieren. Also eine Maschine, die einen Wirkungsgrad  $\eta = 1$  hat, arbeitet mit einem Reservoir am absoluten Nullpunkt. Diese Definition ist viel genauer als mit dem Gasthermometer. Da man zum Beispiel den Thermoelektrischen Effekt ausnutzend eine Wärmekraftmaschine bauen kann, die keine mechanischen Elemente enthalten.

Diese Definition ist Material- und Prozessunabhängig.

**5.7.4 Umkehrung von Prozessen**

Wir stecken die Arbeit  $-W$  in den Prozess, und kühlen damit etwas ab.  $\Rightarrow$  Kältemaschine.

z.B: Kühlschrank, Wärmepumpe.

**5.7.5 Wirkung****Definition**

$$\begin{array}{lcl} \text{Energie} & \times & \text{Zeit} \\ & & Js \\ \text{Impuls} & \times & \text{Weg} \\ \frac{kgm}{s} & \cdot & m \end{array}$$

<sup>3</sup><http://techni.tachemie.uni-leipzig.de/stirling/>

<sup>4</sup><http://www.k-wz.de/vmotor/stirling.html>

<sup>5</sup><http://home.germany.net/101-276996/fette.htm>

**Extremalprinzipien (Minimalprinzipien)**

Alle Prozesse laufen so ab, dass gewisse Grössen Extremalwerte annehmen.

Man kann den Weg zwischen zwei Punkten, so definieren, dass die Wirkung entlang des Weges ein Minimum ist.

**Ein System legt den Weg der geringsten Wirkung zurück.**

Begründung aus der Quantenmechanik.

$$W = n \cdot h \quad (5.38)$$

W ... Wirkung

h ... Plancksches Wirkungsquantum.

**Mittlere freie Weglänge**

Welchen Weg legt ein Teilchen in einem Gas zurück, bevor es mit einem anderen zusammenstösst?

$$\lambda = \frac{\text{Zurueckgelegter Weg}}{\text{Zahl der Stoesse entlang dieses Weges}} \quad (5.39)$$

Wir strecken den Weg eines Teilchens auf einen Zylinder l aus. Wir haben ein Teilchen mit dem Durchmesser  $d_0$  (Moleküldurchmesser). Ein zweites Molekül in dem Zylinder mit Durchmesser  $2d_0$  zusammen stossen.

$$\lambda = \frac{l}{n \cdot l \cdot d_0^2 \pi} = \frac{1}{\pi d_0^2 n} \quad (5.40)$$

n ... Zahl der Teilchen pro Volumen

**Wirkungsquerschnitt, Streuungsquerschnitt**

$$\sigma = d_0^2 \pi \quad (5.41)$$

$$\lambda = \frac{1}{n\sigma} \quad (5.42)$$

Luft, p = 1 atm  $\lambda \approx 10^{-7} m$

in 100 km Höhe  $\lambda \approx 1 m$

in 300 km Höhe  $\lambda \approx 10 km$

**5.8 Zustandsgrössen**

Zustandsgrössen dienen zur makroskopischen Beschreibung eines Thermodynamischensystems. Wir unterscheiden zwischen intensiven und extensiven Zustandsgrössen.

**5.8.1 Extensive Zustandsgrössen**

Sind die Zustandsgrössen, die proportional zur Stoffmenge sind.

zum Beispiel:  $V, N, U = nRT \cdot \frac{3}{2}$

**5.8.2 Intensive Zustandsgrössen**

Sind die Zustandsgrössen, die unabhängig von der Stoffmenge sind.

zum Beispiel:  $T, P, S$



## 5.9 Entropie (Boltzmann, Gibbs)

Wir betrachten einen reversiblen Prozess in einem idealen Gas. Es gilt allgemein  $dU = dQ + dW$  also auch  $dQ = dU - dW$ . Wir versuchen nun diese Grösse in Zusammenhang von den uns benutzten Grössen zur Beschreibung des idealen Gases  $V$  und  $T$  zu bringen.

$$\begin{aligned}dQ &= dU - dW \\dQ &= dU + PdV \\dQ &= C_V dT + nRT \frac{dV}{V} \\\frac{dQ}{T} &= C_V \frac{dT}{T} + nR \frac{dV}{V}\end{aligned}$$

Änderung von  $1 \rightarrow 2$

$$\underbrace{\int_1^2 \frac{dQ}{T}}_{\text{Entropieänderung } \Delta S} = \underbrace{C_V \ln \frac{T_2}{T_1}}_{\text{Temperaturaenderung}} + \underbrace{nR \ln \frac{V_2}{V_1}}_{\text{Volumsaenderung}}$$

$$\Delta S = \int_1^2 \frac{dQ}{T} = \int_1^2 dS$$

$$dS = \frac{dQ_{Rev}}{T}$$

Die Entropie ist eine Zustandsgrösse.

Diese Definition der Entropie  $dS = \frac{dQ}{T}$  gilt nur für reversible Prozesse. Wenn man einem System Wärmeenergie entnimmt verringert man seine Entropie. Um die Entropie wieder auf das ursprüngliche Niveau zurück zu bringen, muss man bei reversiblen Prozessen dann diese Wärmeenergie nur wieder zuführen.

### 5.9.1 Beispiele

Isotherme Expansion:  $\Delta S = nR \ln \frac{V_2}{V_1} = \frac{Q}{T}$

$Q$  in / aus Reservoir.

Gesamtsystem: Gas + Reservoir:  $\Delta S_{Gas} = -\Delta S_{Reservoir}$

$$\begin{aligned}\Delta S_{U \rightarrow \text{Universum}} &= \Delta S_{Gas} + \Delta S_{Reservoir} \\\Delta S_U &= 0\end{aligned}$$

Bei allen reversiblen Prozessen bleibt die Entropie des Universums konstant.

### 5.9.2 Zusammenhang Entropie, Ordnung und Unordnung

Gas expandiert in Vakuum. Gleiches Volumen vom Vakuum und des Gases. Was passiert mit der Entropie?

$$\begin{aligned}dS &= \frac{dQ}{T} \\\Delta S &= ? \int \frac{dQ}{T} = ? \frac{Q}{T} = ? 0\end{aligned}$$

Da dieser Prozess irreversibel ist,  $S$  ist Zustandsfunktion. Ich muss einen reversiblen Prozess suchen der das gleiche leistet. Dieser reversibler Prozess ist zum Beispiel die isotherme Expansion.

$\Rightarrow \Delta S = nR \ln \frac{V_2}{V_1}$ . Hier speziell für  $V_2 = 2V_1$ , gilt:

$$\begin{aligned}\Delta S &= nR \ln 2 \\ \Delta S &= Nk_B \ln 2 \\ \Delta S &= -Nk_B \ln w_{\rightarrow \text{Wahrscheinlichkeit}}\end{aligned}$$

$w$  ist die Wahrscheinlichkeit ein Molekül in dem ersten oder zweiten Zustand zu finden.

Also wir können die Entropie bei einem irreversiblen Prozess nicht mit  $dS = \frac{dQ}{T}$  bestimmen, sondern wir suchen uns einen reversiblen Prozess, der das Gleiche tut, und bestimmen die Entropieänderung von diesem.

### 5.9.3 Entropie und Unordnung

Gasbehälter mit durcheinander fliegenden Molekülen fährt mit Geschwindigkeit  $v$  gegen eine Mauer.

Vorher: ungeordnete Energie  $U$ . Geordnete Energie  $\frac{Mv^2}{2}$

Naher: Nur ungeordnete Energie  $U' = U + \frac{Mv^2}{2}$

$\frac{Mv^2}{2} \Rightarrow \text{Umwandlung} \rightarrow \text{Entropiezuwachs } Q$

Irreversibler Prozess: Entropiezuwachs des Universums.

$$\underbrace{W}_{\text{Mechanische Energie}} = T \cdot \Delta S_U \quad (5.43)$$

Die mechanische Energie  $W$  kann nicht wieder in Arbeit umgewandelt werden: Sie wird entwertet.

Durch irreversible Prozesse wird mechanische Energie entwertet.

Die Entropie des Universums nimmt bei jedem Prozess entweder zu oder bleibt konstant. Das Universum geht einem Wärmetot entgegen.

Leidenfrost: Tanzende Tropfen.

## 5.10 Dewargefäß

Glasgefäß. Doppelte Wand, innen Vakuum. Innen Metallisiert.

Keine Wärmeleitung und keine Wärmestrahlung.

# Kapitel 6

## Elektrodynamik (Vorwort)

### Aufbau des Stoffes

- Ruhende Ladungen: Elektrostatik
- gleichförmig bewegte Ladungen: konstante elektrische Ströme, magnetische Felder
- langsam veränderliche Ströme: Wechselströme
- schnell veränderliche Ströme: Elektromagnetische Wellen: Elektrodynamik

Hierbei erarbeiten wir uns die Maxwellgleichungen (vier).

Wir werden es hier mit elektromagnetischen Kräften zu tun haben. Diese sind in etwa um einen Faktor  $10^{39}$  stärker als die Gravitationskräfte. Die elektromagnetischen Kräfte sind deswegen die wichtigsten Kräfte in der Natur. Im Weltraum ist es die Gravitation, weil sich die negativen und positiven Kräfte der grossen Himmelskörper aufheben.

Im Gegensatz zur Gravitation gibt es bei elektromagnetischen Kräften zwei Vorzeichen. Es gibt keine negativen Massen, aber es gibt positive und negative Ladungen.

Die elektromagnetischen Kräfte sind nicht instantan, sondern brauchen eine bestimmte Zeit um sich auszubreiten. Dies bedeutet, dass Effekt und Wirkung nicht zum gleichen Zeitpunkt auftreten. Dies führt zur Relativitätstheorie. Man sagt die elektrischen Kräfte seien Nahwirkungskräfte.

### Nahwirkungskräfte

Dies bedeutet, dass eine Kraft nur seine unmittelbare Umgebung beeinflusst, und sich diese Beeinflussung dann im Raum ausbreitet.

Die elektrodynamischen Kräfte kann man sich als Fluss in einem Vektorfeld vorgestellt werden. Deswegen spricht man von einem elektromagnetischen Feld.

## 6.1 Elektromagnetisches Feld

Dieses wird durch Feldvektoren beschrieben, mit dem elektrischen Feldvektor  $\vec{E}$  und dem magnetischen  $\vec{B}$ .  $\vec{B}$  verhält sich wie ein Axialvektor (Winkelgeschwindigkeitsvektor). Dieses Feld wird durch eine Ladung erzeugt.

Wenn wir 2 Ladungen haben, erzeugen diese Felder. Diese Felder wirken auf die Ladungen.

Elektrische Felder brauchen kein Medium zur Ausbreitung. Die Ausbreitung passiert auch im Vakuum. Zum Beispiel die Wärmestrahlung von der Sonne. Früher hat man geglaubt hierfür wäre ein *Äther* nötig.

### 6.1.1 Elektromagnetische Wellen

Modell für die Lichtausbreitung: die sogenannte *Wellenoptik*.

#### Experimentelle Befunde

- **Relativitätsprinzip:** Die Naturgesetze haben in allen Inertialsystemen die gleiche Form, d.h. es gibt kein asugezeichnetes Inertialsystem.
- **Konstanz der Lichtgeschwindigkeit:** Versuche von Michelson und Morley. Die Lichtgeschwindigkeit ist in jedem Inertialprinzip gleich.

Unter der Annahme es gäbe einen Äther, müsste dieser in einem Inertialsystem ruhen. Wenn man sich relativ zu diesem bewegt, müsste sich die Lichtgeschwindigkeit ändern. Dies ist nicht der Fall, was bedeutet, dass es keinen Äther gibt. Hierraus ergibt sich zwingend, dass man das Konzept der universellen Gleichzeitigkeit aufgeben muss.

#### Quantenphysik

**Experimenteller Befund: Photoelektrischer Effekt** zeigt, dass man das Verhalten von Licht nicht nur, als Wellenvorgang verstehen kann, sondern er kann nur verstanden werden, in dem es Lichtquanten (sogennante *Photonen*) gibt. Nur mit diesen kann das Herausschlagen von Elektronen aus einem Metal erklärt werden.

Um dies zu erklären führt man den **Welle-Teilchen-Dualismus** ein. Man hat also zwei Modelle zum Beschreiben des Lichtes. Diese dürfen sich nicht widersprechen. Man definiert dann näher eine Wahrscheinlichkeit.

# Kapitel 7

## Elektrostatik

Name kommt von Bernstein (*Elektron*), weil wenn man ihn reibt, entstehen elektrostatische Effekte.

### 7.1 Experimentelle Grundbefunde

Aufbauend auf diese Grundbefunden werden wir Schlussfolgerungen ziehen.

#### 7.1.1 2. Arten von Elektrischen Ladungen

##### Materialien

Elektrometer, Glasstab, Hartgummistab, Katzenfell, Lederfleck.

##### Experiment

Hartgummistab wird mit Katzenfell gerieben, Glasstab mit Leder. Stellen fest, durch Reibung erhält der Stab eine Ladung, können diese mit Elektrometer messen. Wenn man mit dem Glasstab in die Nähe des geladenen Elektrometers kommt, wird der Ausschlag kleiner, beim Hartgummistab grösser.

##### Folgerung

Es existieren zwei Ladungen  $+$  und  $-$ . Welche  $+$  und  $-$  ist, ist willkürlich. Lichtenberg hat festgelegt  $-$  ist Hartgummi,  $+$  ist Glas.

#### 7.1.2 Übertragung von Ladungen

Ladung wird auf Metalkugel übertragen. Wenn man die Ladung vom Glasstab und danach vom Hartgummistab übertrag, dann gleichen sie sich aus. Man sieht, Ladungen können *geschaufelt* werden. Sie sind mit Materietransport verbunden. Und Ladungen gleichen sich aus.

#### 7.1.3 Ladung von Kugeln

##### Materialien

2 an Frauenhaaren aufgehängten Kugeln. Diese sind Ungeladen.

**Experiment**

Wir laden die beiden Kugeln mit der gleichen Art von Elektrizität auf. Man sieht sie stossen sich ab. Wir laden jetzt eines der beiden Kugel mit der anderen Art der Ladung. Die beiden Kugeln ziehen sich an.

**Folgerungen**

Ladungen mit gleichem Vorzeichen stossen sich ab.  
Ladungen mit unterschiedlichen Vorzeichen ziehen sich an.

**7.1.4 Wiso geht das?****Experiment**

Vergleichen Ladung von Glasstab und Rehleder. Man sieht Glasstab ist positiv geladen. Rehleder ist negativ geladen.

**Folgerung**

Man kann Ladungen durch räumliche Trennung „erzeugen“. Man erzeugt nicht wirklich Ladungen, sondern nimmt sie aus dem einen Material heraus, und bringt sie in ein anderes. Dies ist damit konsistent, dass in einem abgeschlossenen System die Ladungen immer erhalten bleiben. Ein weiterer **Erhaltungssatz**.

**7.1.5 Ladung mit Körper verbunden?****Material**

Hochspannungsquelle, Metallkugel an einem Plastikstab

**Experiment**

Man kann mit dem Stab, die Ladungen von der Quelle auf das Elektrometer übertragen. Man sieht auch, dass das Plus vom Hochspannungsgerät mit der Definition von Lichtenberg zusammenpasst.

**Folgerung**

Ladungen sind mit Masseteilchen gebunden. Also können Massen Ladungen tragen.  
Also kann man Ladungen „löffeln“

**7.1.6 Leitung von Ladungen****Material**

trockener Holzstab

**Experiment**

Der trockene Holzstab leitet die Ladungen nicht. Nach dem befeuchten des Holzstabs leitet der Holzstab. Die Ladungsträger können über ihn abfließen.

**Folgerung**

Verschiedene Körper leiten Ladungen verschieden gut.

### 7.1.7 Grösse von Ladungen

Versuche von Millikan und Ehrenhaft. Man versucht, ob es eine minimale Grösse für Ladungen gibt. Man verwende Öltröpfchen im Mikrometer bereich. Diese tragen eine gewisse Ladung. Beim Zersteubungsvorgang des Öls erhalten die Tröpfchen verschiedene Ladungen. Dies wird gemessen mit einem Kondensator. Oben + und unten -. Es entsteht zwischen den Platten ein elektrisches Feld. Wenn man in dieses Feld ein geladenes Teilchen bringen, und dieses eine negative Ladung hat, wird auf dieses eine Kraft nach oben wirken. Diese Kraft kann man an der Steig- und Fallgeschwindigkeit der Öltröpfchen messen. Wenn man eine Vielzahl von unterschiedlichen Tröpfchen betrachtet, sieht man, dass die Kräfte nur in gewissen Abstufungen vorkommen. Man stellt fest, dass es eine gewisse Stufung gab (heute würde es quantisierung nennen). Dies bedeutet es gibt eine minimale Ladung (Ladungsquanten). Es gibt nur diese Ladung, Vielfache von ihr, oder keine Ladung. Diese ist:

$$e = 1.602 \cdot 10^{-19} \underbrace{As}_C \quad (7.1)$$

Wesentlich ist aber erstmal nicht dieser genaue Wert, sondern dass es eine kleinste Ladungsmenge gibt. Diese nennen wir eine Elementarladung.

### 7.1.8 Zusammenhang Kraft, Ladung und Abstand

#### Experiment

Man hat zwei Ladungen auf Kugeln mit einer Torsionswaage verbunden. Was passiert, wenn man die Ladung auf einer Kugel verdoppelt. Oder den Abstand verändert. Man beobachtet die relativen Kraftänderungen.

Wenn man die Ladung auf einer Kugel halbiert (in dem man sie mit einer gleich grossen Kugel berührt), man sieht der Ausschlag ist nur noch halb so gross. Das gleiche passiert auch bei der anderen Kugel.

#### Folgerung

Die Kraft ist proportional zur Ladung der beiden Kugeln.  $F \propto q \cdot Q$ .

#### Zusammenhang Kraft Abstand

Wenn man die Distanz zwischen den beiden Kugeln ver Wurzel 2 facht ( $d = d_0\sqrt{2}$ ), man sieht die Kraft wird halb so gross. Wenn man jetzt auf den doppelten Ausgangsabstand geht, halbiert sich der Abstand nochmal.

#### Folgerung

Die Kraft ist indirekt proportional zum Abstands Quadrat.  $F \propto 1/r^2$ .

## 7.2 Gesetze

### 7.2.1 Coulombsche-Gesetz

Diese beschreibt, die Kraft zwischen 2 Ladungen.

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q \cdot q}{r^2} \cdot \hat{r} \quad (7.2)$$

Das  $r^2$  kommt, weil es sich um 2 Punktladungen handelt. Diese haben eine sphärische Symmetrie. Aus dieser folgt das Quadrat.  $\hat{r}$  ist der Einheitsvektor von r.

Erklärung von  $\epsilon_0$  folgt erst bei den magnetischen Phänomenen.

$$\epsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12} \frac{A^2}{N} \left( \frac{s}{m} \right)^2 \quad (7.3)$$

$\epsilon_0$  ist eine universelle Konstante und heisst die **Elektrische Feldkonstante**.  
Hierraus ergibt sich die Ladungseinheit Coulomb:  $1C = 1As$ .

### Beispiel

Kraft zwischen 2 Punktladungen von 1 C im abstand 1 m:

$$|\vec{F}| = \frac{10^{12}}{12 \cdot 9} \cdot \frac{1 \cdot 1}{1} = 10^{10} N \quad (7.4)$$

### Beziehung auf eine Einheitsladung

Wir kommen zum Begriff der **elektrischen Feldstärke**:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} \quad (7.5)$$

Diese gibt die Kraft an, die auf die auf eine Ladungseinheit wirkt. Für  $\vec{E}$  gilt in der Umgebung einer Punktladung:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{r} \quad (7.6)$$

### Elektrischer Fluss

Diese Grösse ist aus der Hydrodynamik „ausgeborgt“. Wir hinterfragen welche Feldvektoren durch eine Fläche A treten.

$$\Phi_E = \iint_A \vec{E} \cdot d\vec{f} \quad (7.7)$$

$d\vec{f}$  ist ein Flächenelement, der Fläche A. Dieser Vektor steht senkrecht auf die Fläche und hat die Grösse der Fläche als Betrag. Wir wollen jetzt den Fluss durch eine Kugelfläche, rund um eine Punktladung Q legen. Wir betrachten den elektrischen Fluss durch diese Kugelfläche A.

$$\begin{aligned} \Phi_E &= \iint_A \vec{E} \cdot d\vec{f} = \lim \sum_A \underbrace{\vec{E} \cdot \Delta\vec{f}}_{=|\vec{E}| \cdot \Delta f} = \\ &= \lim \left( \underbrace{\sum_A \Delta f}_{=4\pi R^2} \cdot \underbrace{|\vec{E}|}_{=\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^2}} \right) = \frac{Q}{\epsilon_0} \end{aligned}$$

Damit ergibt sich allgemein:

#### 7.2.2 Gauß'sches Gesetz

Dieses beschreibt den Fluss aus einer Punktladung.

$$\Phi_E = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad (7.8)$$



### 7.2.3 Räumlich ausgedehnte Ladungen

Wir betrachten eine räumlich ausgedehnte Ladungsverteilung. Wir haben eine Raumlading in dem Volumen  $V$ . Dies beschreiben wir (analog zu der Masse) durch die Ladungsdichte  $\rho = \Delta Q / \Delta v = dQ/dv$ . Damit erhält man für die Gesamtladung:

$$Q = \iiint_V \rho dv \quad (7.9)$$

### 7.2.4 Elektrischer Fluss aus der Raumlading

Wir verwenden das Gauß'sches Gesetz  $\Phi_E = Q/\epsilon_0$ . Also:

$$\begin{aligned} \Phi_E &= \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_V \rho \cdot dv \\ &= \iiint_V \frac{\rho}{\epsilon_0} \cdot dv \\ \Phi_E &= \oiint_{Rand(V)} \vec{E} \cdot d\vec{f} \\ \text{Mit dem Gauß'schen Satz} &= \iiint_V \underbrace{div \vec{E}}_{Skalar} \cdot dv \end{aligned}$$

#### Divergenz

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \begin{pmatrix} E_1(x_1, x_2, x_3) \\ E_2(x_1, x_2, x_3) \\ E_3(x_1, x_2, x_3) \end{pmatrix} \\ div \vec{E} &= \frac{\partial E_1}{\partial x_1} + \frac{\partial E_2}{\partial x_2} + \frac{\partial E_3}{\partial x_3} \end{aligned}$$

#### Damit

$$\begin{aligned} \Phi_E &= \iiint_V div \vec{E} \cdot dv \\ &\quad \text{Durch Gleichsetzen} \\ \iiint_V \frac{\rho}{\epsilon_0} dv &= \iiint_V div \vec{E} dv \end{aligned}$$

Weil dies für alle Volumen gelten muss, erhalten wir:

$$div \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (7.10)$$

Die erste Maxwell-Gleichung.

#### Bedeutung der Divergenz

Gauß'scher Satz:

$$\oiint_{Rd(V)} \vec{E} \cdot d\vec{f} = \iiint_V div \vec{E} \cdot dv \quad (7.11)$$

Betrachten ein kleines Volumen  $\Delta V$ . Mit kleinem Volumen ist gemeint, dass sich der Vektor  $\vec{E}$  nicht mehr merkbar ändert.

$$\underbrace{\oint_{Rd(\Delta V)} \vec{E} \cdot d\vec{f}}_{\text{Fluss, der aus } \Delta V \text{ austritt}} = \underbrace{\iiint_{\Delta V} \text{div} \vec{E} \cdot dv}_{= \text{div} \vec{E} \cdot \Delta V} : \Delta V$$

$$\underbrace{\text{div} \vec{E}}_{\text{Quellstärke}} = \frac{1}{\Delta V} \underbrace{\oint_{Rd(\Delta V)} \vec{E} \cdot d\vec{f}}_{\text{Fluss der aus } \Delta V \text{ austritt}}$$

### 7.2.5 Potentielle Energie

Wir betrachten die potentielle Energie einer Ladung in einem elektrischen Feld.

$$V(P) = - \int_{P_0}^P \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (7.12)$$

Diese Gleichung ist nur der Begriff der potentiellen Energie.  $P_0$  ist der Bezugspunkt, bei uns jetzt oft im Unendlichen.

#### Für eine Punktladung

Wir betrachten eine Punktladung  $Q$ . Abstand der Ladung  $q$  im Punkt  $P$  ist  $R$ .  $P_0$  liegt im Unendlichen, also  $r_{P_0} = \infty$ .

$$V(P) = - \int_{\infty}^R \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{r^2} dr$$

$$V(R) = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R}$$

#### Bezug auf die Ladungseinheit

Wir beziehen uns auf die Ladungseinheit:

### 7.2.6 Elektrisches Potential

Dies ist die Potentielle Energie pro Ladungseinheit:

$$\phi = - \int_{P_0}^P \underbrace{\vec{E}}_{\vec{F}/q} \cdot d\vec{r} \quad (7.13)$$

#### Arbeit pro Ladungseinheit

Wir berechnen die Arbeit pro Ladungseinheit entlang eines Weges von  $P_1 \rightarrow P_2$

$$\int_{P_1}^{P_2} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \underbrace{\int_{P_0}^{P_1} \vec{E} \cdot d\vec{r}}_{\phi(P_1)} + \underbrace{\int_{P_0}^{P_2} \vec{E} \cdot d\vec{r}}_{-\phi(P_2)}$$

### 7.2.7 Spannung

Wir führen die elektrische Spannung  $U$  ein. Dies ist allgemein und nicht speziell für eine Punktladung.

$$U_{12} = \phi(P_1) - \phi(P_2) \quad (7.14)$$

Dies ist die Energie pro Ladung, diese nennen wir Volt.

Die Spannung ist die Arbeit, die man leisten muss, um eine Ladung von einem Punkt zu einem anderen zu verschieben. Bei dieser spielt die Wahl des Bezugspunktes keine Rolle, da es sich um eine Differenz von Potentialen handelt, und ein unterschiedlicher Bezugspunkt nur zu einer Veränderung des Potentials um eine Konstante führt.

#### Folgerung

Zusammenhang elektrischer Feldstärke  $\vec{E}$  und elektrischem Potential  $\phi$ .

Betrachten zwei nahe benachbarte Punkte: genannt  $P_1$  und  $P_2$ .

$P_1$  an der Stelle  $\vec{r}_1$ .  $P_2$  an der Stelle  $\vec{r}_2 = \vec{r}_1 + \Delta\vec{r}$ . Nahe benachbart bedeutet Feld zwischen  $P_1$  und  $P_2$  ändert sich nicht stark:

Spannung  $P_1 \rightarrow P_2$ :

$$\begin{aligned} U_{12} &= \int_{P_1}^{P_2} \vec{E} \cdot d\vec{r} \cong \vec{E} \cdot \Delta\vec{r} \\ U_{12} &= \phi_1 - \phi_2 = -[\phi_2 - \phi_1] \cong -\left[\frac{\partial\phi}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial\phi}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial\phi}{\partial z}\Delta z\right] \\ &= -(\nabla\phi) \cdot (\Delta\vec{r}) \end{aligned}$$

### 7.2.8 Skalares Potential

Das skalare Potential  $\phi$  ist gegeben durch:

$$\vec{E} = -\nabla\phi \quad (7.15)$$

$$[\vec{E}] = [V/m]$$

#### Wieder die Punktladung

$$\phi = -\int_{\infty}^R \vec{E} \cdot d\vec{r} = -\int_{\infty}^R \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \cdot d\vec{r}$$

Potential um eine Punktladung, mit Bezugspunkt im Unendlichen:

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R} \quad (7.16)$$

Elektrische Spannung zwischen zwei Punkten:

$$U_{12} = \phi_1 - \phi_2 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \quad (7.17)$$

Man erhält, Abstandskugeln um eine Punktladung, auf denen die Potentialänderung 0 ist. Wenn die Punktladung  $Q > 0$  ist und  $R_1 < R_2$  ist  $U_{12} > 0$ . Beim Weg von  $P_1$  nach  $P_2$  leistet das Feld eine positive Arbeit.

### 7.2.9 Ein Zusammenhang

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ -\underbrace{\operatorname{div}(\operatorname{grad} \phi)}_{\Delta \phi} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \end{aligned}$$

### 7.2.10 Poissongleichung

$$\Delta \phi = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (7.18)$$

### 7.2.11 Laplace Differentialgleichung

Im ladungsfreien Raum:

$$\Delta \phi = 0 \quad (7.19)$$

Dies sind die Grundgleichungen der Elektrostatik.

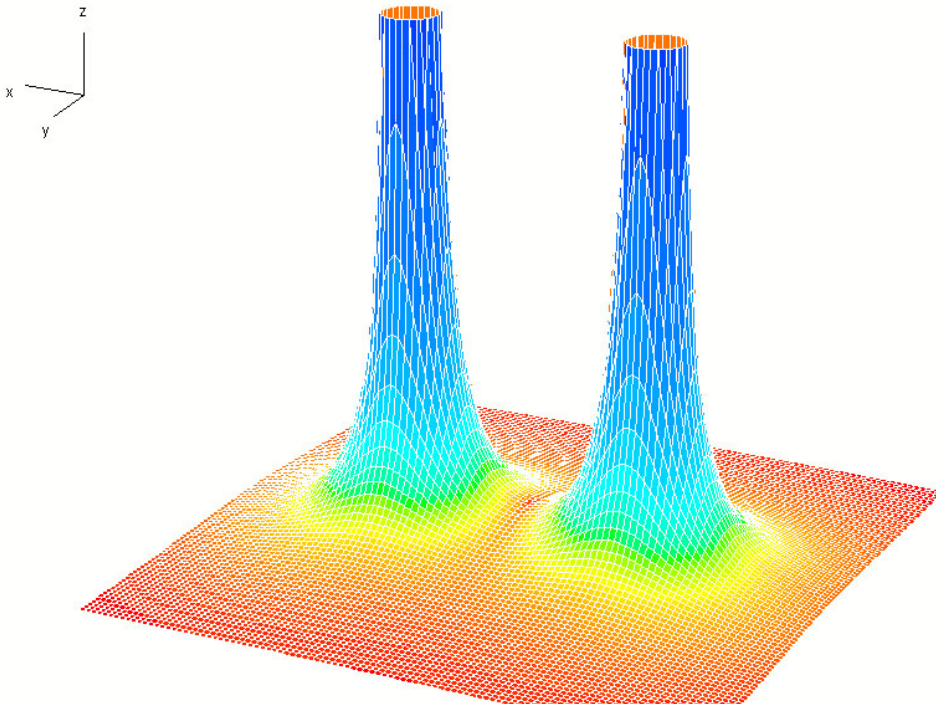
Satz: Bei vorgegebenen Randbedingungen ist die Lösung der Poissongleichung eindeutig. Daher genügt es irgendeine Lösung des Problems zu haben, da daraus folgt, dass man alle Lösungen hat.

### 7.2.12 Feldlinien

Dies sind analog zu den Stromlinien die Tangentialen an die Feldvektoren.

#### Feld um 2 Ladungen

Ich will euch nur meine tollen 3D Plots zeigen.



Die zwei Ladungen wären in der Mitte der Kegel. Die Farben symbolisieren, die Steigung. Rot ist flach, blau ist steil.

## 7.3 Zusammenfassung

### 7.3.1 Gauß'sche Gesetz

$$\Phi_E = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad (7.20)$$

Dies besagt, dass der Fluss durch eine geschlossene Fläche, um eine Ladung  $Q$ , gleich  $Q/\epsilon_0$  ist. Also grob: Aus Ladungen kommen elektrische Felder heraus. Dies heisst auch, dass aus einer Fläche, in der keine Ladung ist, kein Feld austritt.

#### Eine Maxwell-Gleichung

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (7.21)$$

Dieses Gesetz bezieht sich nun auf die Eigenschaft eines Punktes. Diese beiden Aussagen sind analog.

$$\vec{E} = -\operatorname{grad} \phi \quad (7.22)$$

$\phi$  ist das elektrische Potential. Durch Potentialdifferenzen erhält man dann Spannungen. Das Vektorfeld  $\vec{E}$  wird durch das Skalarfeld  $\phi$  dargestellt. Dies setzt voraus, dass das elektrische Feld konservativ ist. Dies ist erfüllt. Dies wird später im allgemeinen nicht mehr erfüllt sein.

Diese Grössen sind definiert an Hand von mechanischen Konzepten. Hier sind dies im Speziellen der Begriff der Arbeit und der Energie.

#### Grundgleichung der Elektrostatik

$$\operatorname{div}(-\operatorname{grad} \phi) = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Dies ist die Poissongleichung:

$$\Delta \phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (7.23)$$

Diese Gleichung hat nur eine Lösung. Sie hat für festige Randbedingungen nur eine eindeutige Lösung.

### 7.3.2 Hohlkugel

Wir betrachten eine geladene leitende Hohlkugel. Diese hat die Ladung  $Q$  und den Radius  $R$ . Wir haben den Aussen- und Innenraum:

#### Aussenraum

Wir umgeben die Kugel mit einer weiteren Kugelfläche  $K$  mit Radius  $r$ .  $r > R$

$$\begin{aligned} \Phi_E &= \iint_K \underbrace{\vec{E} \cdot d\vec{f}}_{|\vec{E}| \cdot df} = 4\pi r^2 \cdot E \\ \Phi_E &= \frac{Q}{\epsilon_0} \\ 4\pi r^2 \cdot E &= \frac{Q}{\epsilon_0} \\ E &= \frac{Q}{4\pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2} \end{aligned}$$

Dies ist das Gleiche wie das elektrische Feld einer Punktladung.

$$\begin{aligned}\phi &= - \int_{\infty}^r \frac{Q}{4\pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2} dr \\ &= \frac{Q}{4\pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{1}{r}\end{aligned}$$

Dies wiederherum analog zur Punktladung. Dies ist wiederum beschränkt auf den Bereich außerhalb der Kugel ( $r \leq R$ ).

Man erkennt:

$$|\vec{E}| = \frac{\phi}{r} \quad (7.24)$$

Bei konstanten  $r$  ist  $\phi$  eine Konstante. Das heisst: die konzentrischen Kugelflächen sind **Äquipotentialflächen**.

$|\vec{E}|$  nimmt zu mit Krümmungsradius  $r$  abnehmend. Also je stärker etwas gekrümmt ist, desto stärker ist das Feld. Deswegen ist an einer Spitze das Elektrische Feld am stärksten. z.B: Spitzen bei Blitzableitern.

### Innenraum

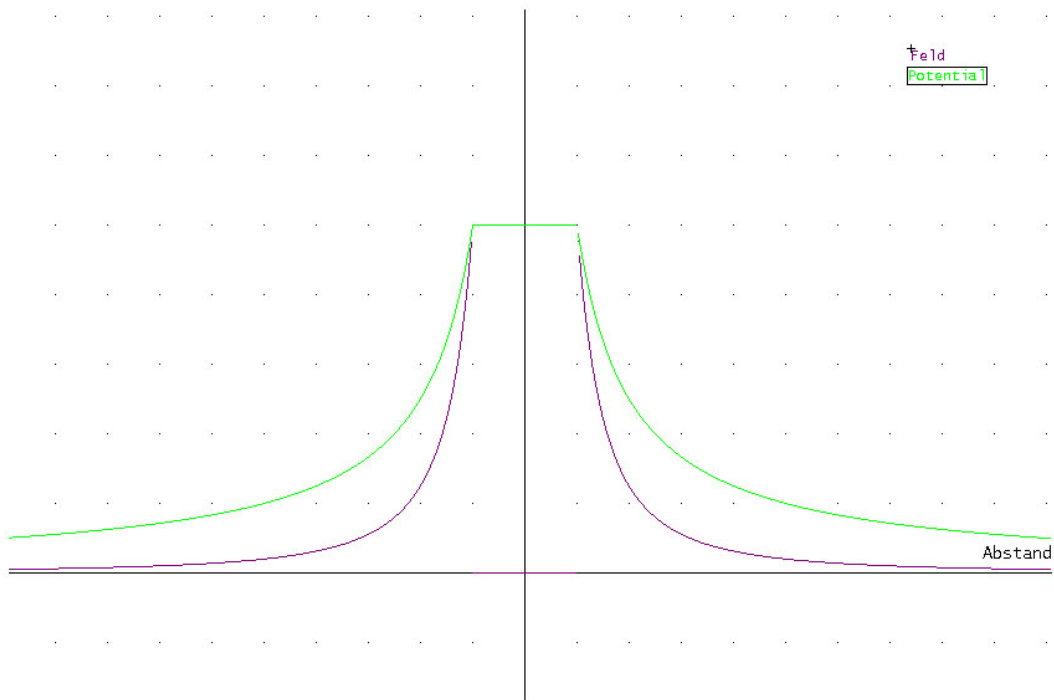
Wir haben keine Ladungen im Innenraum. Deswegen gilt die Laplacegleichung:

$$\Delta\phi = 0$$

Die Kugelfläche ist eine Äquipotentialfläche. Für den Innenraum kann  $\Delta\phi = 0$  mit  $\phi = \text{const.}$  gelöst werden. Also  $\phi$  ist ortsunabhängig, also überall im Inneren der Kugel gleich. Da die Lösung der Laplacegleichung eindeutig ist, folgt wir haben die Lösung. Es gilt also im inneren der Kugel:

$$\begin{aligned}\phi &= \text{const.} \\ \vec{E} &= -\text{grad}\phi = 0\end{aligned}$$

Also ist der Innenraum der Kugel feldfrei. Dies gilt allgemein für geschlossene leitende Körper. Hiermit ergibt sich das Konzept des **Faraday-Käfigs**.



### 7.3.3 Hohlzylinder

Wir betrachten einen geladenen leitenden Hohlzylinder. Diesen abstrahieren wir als unendlich lang. Deswegen kennen wir nur die Ladung pro Längeneinheit  $\lambda$  und den Radius des Zylinders  $R$ .

#### Aussenraum

Wir betrachten eine koaxiale Zylinderfläche mit Radius  $r > R$ . Wir betrachten den Fluss durch Zylinderfläche  $Z$  mit Zylinderlänge  $l$ :

$$\begin{aligned}\Phi_E &= \iint_Z \underbrace{\vec{E} \cdot d\vec{f}}_{|\vec{E}| \cdot df} = 2\pi r \cdot l \cdot E \\ \text{Ladung } Q &= \lambda \cdot l \\ \Phi_E &= \frac{\lambda \cdot l}{\epsilon_0} \\ 2\pi r l \cdot E &= \frac{\lambda l}{\epsilon_0} \\ E &= \frac{\lambda}{2\pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{1}{r}\end{aligned}$$

Dies gilt nur ausserhalb der Kugel ( $r \geq R$ ). Man sieht Abhängigkeit  $1/r$  oder  $1/r^2$  ist keine Eigenschaft des Feldes sondern eine der Geometrie.

Damit können wir das Potential berechnen. Wir wählen als Bezugspunkt die Oberfläche des Hohlzylinders.

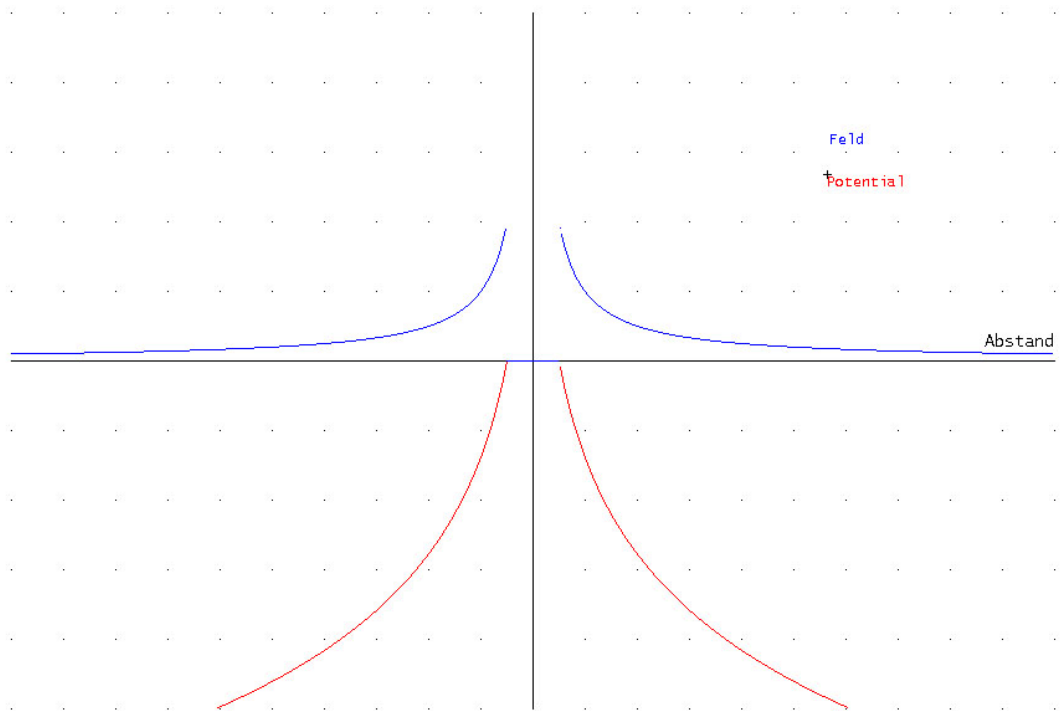
$$\begin{aligned}\phi &= - \int_R^r \underbrace{\frac{\lambda}{2\pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{1}{r}}_E dr \\ \phi &= - \frac{\lambda}{2\pi \cdot \epsilon_0} \cdot \ln\left(\frac{r}{R}\right)\end{aligned}\tag{7.25}$$

Man erhält bei Bezugspunkt  $r = R$  ein  $\phi = 0$ .

#### Innenraum

Dieser ist analog zur Hohlkugel wieder Feldfrei.

$$\begin{aligned}E &= 0(-\text{grad}\phi) \\ \phi &= \text{const.}\end{aligned}$$



### 7.3.4 Faraday Käfig

Ein von einem Leiter umgebener Bereich hat immer das gleiche Potential, also ist er feldfrei. Dies gilt nur in der Elektrostatik, also es gibt keine strömenden Ladungen. Im inneren einer äquipotential Fläche ist das Feld null.

## 7.4 Experimente zur Influenz

Dies sind jetzt Experimente vom Reischl.

### 7.4.1 Influenzwurst

Zylindrischer Leiter mit abgerundeten Ecken. Man sieht die Feldstärke mit Elektrometern. Man sieht die Feldstärke an den Enden ist besonders stark. (Dort wo der Leiter am stärksten gekrümmt ist).

Was machen die Ladungen wenn ich mit einer Ladung (in Form eines geladenen Stabes) in die Nähe komme? Ausschlag in der Nahe Ladung wird kleiner, weit entfernt wird stärker. Wenn die Ladungen gleichnamig sind. Die Ladungen wandern durch die Influenzwurst.

Bei ungleichnamigen Ladungen passiert das Gegenteil. Die Ladungen im Elektrometer wandern zu der Ladung im Stab.

Man sieht, dass die Ladungen sich so arrangieren, dass sich die Felder ausgleichen. Man sieht rechnerisch, dass dann rechnerisch, dass die Feldlinien auf die äquipotential Linien senkrecht stehen.

### 7.4.2 Faraday Becher

Über einem Elektrometer ist ein metallischer Becher. Man versucht dieses durch „Schauffeln“ der Ladungen aufzuladen. Man sieht es bleibt bei einem kleinen Ausschlag.

Wenn man den Becher von innen berührt, steigt die Anzeige an.



**Erklärung**

Da der Innenraum feldfrei sein muss, müssen die Ladungen nach aussen. Deswegen können die Ladungen immer auf den Zylinder übertragen werden. Dies geht immer weiter.

Der Aussenraum muss nicht feldfrei sein, deswegen gibt es dort eine Grenze. Da das Feld des Bechers gegen das Aufladen wirkt.

**7.4.3 Van-de-Graaff-Generator**

Ladungen kommen durch eine Bürste auf ein Gummiband. Dieses wird durch einen Motor nach oben transportiert, in eine metallische Kugel. Dort werden die Ladungen von einer Bürste abgenommen. Da der Innenraum feldfrei bleiben muss, übertragen sie sich auf die Aussenseite der Kugel. Hiermit können sehr hohe Spannungen erzeugt werden.

Die Kugelform ist wichtig, da an Kanten die Felder sehr gross werden würden.

Demonstration mit Papierstreifen auf einem Gummiband.

**7.4.4 Elektrophor**

Oberteil bestehend aus einem leitenden Hohlkörpers. Unterteil ist eine PVC-Scheibe. Diese wird mit dem Katzenfell gerieben (man bringt auf sie Ladungen auf.)

Man bringt den Leiter auf die Platte. Die negativen Ladungen sitzen auf dem PVC. Die positiven Ladungen im Oberteil gehen nach unten, die positiven nach oben. Man berührt die Oberfläche des Oberteils mit einer geerdeten Spitze. Wenn man jetzt das Oberteil wegnimmt, ist es positiv geladen.

Man kann dies beliebig oft wiederholen. Dies ist kein Perpetuum Mobile, weil man zum Wegnehmen des Oberteils Arbeit gegen die Anziehung von positiven und negativen Ladungen verrichten muss.

**7.4.5 Plattenkondensator**

Dieser erzeugt ein homogenes elektrisches Feld in seinem inneren. Eine Platte wird aufgeladen. Die andere ist geerdet. Man hat zwei Plättchen (parallel zu den Platten) und bringt sie zusammen in das elektrische Feld. Dort trennt man sie.

Man sieht die eine Platte ist positiv die andere negativ geladen, und genauso, dass sie die gleiche Ladung haben.

**7.5 Kondensator**

Kondensatoren speichern elektrische Felder innen, ohne dass ein äusseres Feld vorliegt. Also genau das Gegenteil von einer Hohlkugel.

**7.5.1 Erklärung**

Wir betrachten 2 Leiter in einem gewissen Abstand.

1. Es liegt keine Ladung vor, also ist die Situation feldfrei.
2. Ein Leiter mit der positiven Ladung  $+Q$ . Diese wird von einer Spannungsquelle mit Spannung  $U_0$  auf den Leiter gebracht. Es entsteht ein homogenes elektrisches Feld um diese Platte. Die andere Platte anlagert sich so, dass ihr Innenraum feldfrei ist. An der dem anderen Leiter zugewandten Seite sammeln sich negative Ladungen an. Auf der anderen Seite positive. Das Feld geht hinter dieser Platte weiter. (ähnlich dem Elektrophor). Wir haben im inneren des zweiten Leiters Ladungsverschiebung durch Influenz.

3. Ein Leiter hat positive Ladung  $+Q$ . Der andere Leiter ist geerdet. Dies führt dazu, dass auf dem zweiten Leiter nur eine negative Ladung  $-Q$  sitzt.

Wir haben zwischen den Platten weiterhin das gleiche Feld. Da sich die Ladungen der beiden Platten ausgleichen, hat das Gesamtsystem keine Ladung. Dies bewirkt, dass kein elektrischer Fluss austritt, und somit der Aussenraum feldfrei ist.

### Sinn

Das Speichern von Ladungen ohne das Aussen ein Feld ist.

### 7.5.2 Beschreibung

Die Ladung wird proportional zum elektrischen Feld, also auch zur Spannung sein.

$$Q \propto |\vec{E}| \propto U \quad (7.26)$$

Wir machen den ansatz:

$$Q = C \cdot U \quad (7.27)$$

Wir nennen die Konstante  $C$  die Kapazität.

$$C = \frac{Q}{U}$$

$$[C] = \left[ \frac{\text{Coulomb}}{\text{V}} \right] = [\text{Farad}]$$

Die Einheit Farad ist sehr gross. Man bewegt sich im Bereich von pico, nano und micro Farad mit den üblichen Kondensatoren. Man nennt diese Grösse Kapazität. Weil bei vorgegebener Spannung ein Kondensator um so mehr Ladung speichern kann, um so grösser seine Kapazität ist.

### 7.5.3 Kugelkondensator

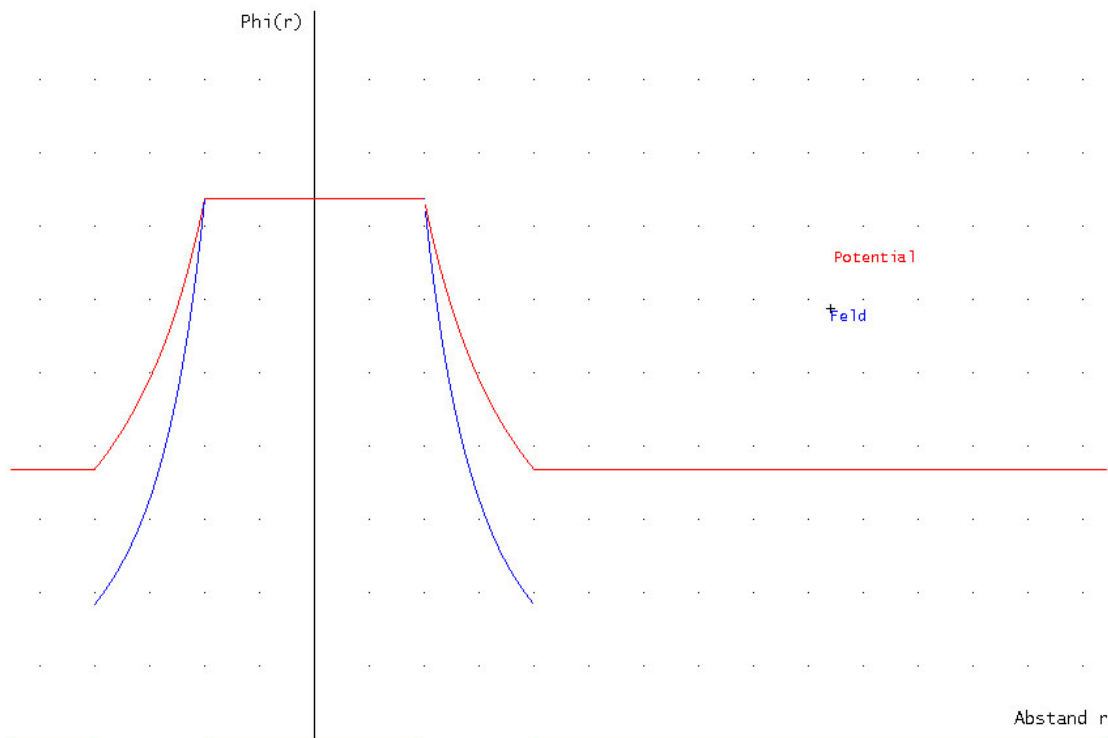
Unsere beiden Leiter sind zwei konzentrischen leitenden Hohlkugeln. Die Innere hat die Ladung  $+Q$  und den Radius  $r_i$ , die äussere  $-Q$  und  $r_a$ . Die Gesamtladung ist 0, deswegen ist kein elektrisches Feld vorhanden. Innen herrscht das Potential  $\phi_i$  und Aussen  $\phi_a$ . Wir definieren die Spannung  $U = \phi_i - \phi_a$ .

Wir können uns das Feld im Aussenfeld der inneren Kugel ausrechnen, da dieses im Innenraum der äusseren Kugel ist.

$$\phi_i = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r_i} \quad (0 \leq r \leq r_i)$$

$$\phi(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r} \quad (r_i \leq r \leq r_a)$$

$$\phi_a = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r_a} \quad (r \geq r_a)$$



$$U = \phi_i - \phi_a = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_a} \right)$$

$$C = \frac{Q}{U} = Q \frac{4\pi\epsilon_0}{Q} \frac{r_a r_i}{r_a - r_i}$$

#### Kapazität eines Kugelkondensators

$$C = 4\pi\epsilon_0 \frac{r_a r_i}{r_a - r_i} \quad (7.28)$$

#### Eine Kugel im Unendlichen

„Die unendliche weit entfernte Gegenelektrode“. Also  $r_a \leftarrow \infty$ .

$$C = 4\pi\epsilon_0 \frac{r_i}{1 - r_i/r_a}$$

$$C = 4\pi\epsilon_0 r_i$$

Man kann dies für die Erde berechnen und erhält:  $C_{Erde} = 0.7mF$ . Man sieht es gibt nur sehr kleine Faradwerte.

#### 7.5.4 Plattenkondensator

Dieser hat auf Grund seiner Geometrie die Eigenschaft, dass das Feld homogen ist. Man denkt sich den Plattenkondensator als unendlich ausgedehnt. Sie sind parallel, deswegen stehen die Feldvektoren normal auf diese.

Dieser Plattenkondensator hat die Fläche A und den Abstand zwischen den Platten d. Die eine

Platte hat die Ladung  $+Q$ , das Potential  $\phi_1$  und die Position  $x = 0$ , die andere die Ladung  $-Q$ , das Potential  $\phi_2$  und die Position  $x=d$ . Die Spannung an dem Kondensator beträgt also  $U = \phi_1 - \phi_2$ . Der Innenraum des Kondensators ist ladungsfrei, deswegen ist der Aussenraum feldfrei.

### Potential im Innenraum

Da dieser Ladungsfrei ist, einfach die Laplace Gleichung. In y- und z-Achse gibt es keine Unterschiede, deswegen braucht man diese nicht zu berücksichtigen. Lösen durch integrieren.

$$\begin{aligned}\Delta\phi &= 0 \\ \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} &= 0 \\ \frac{\partial\phi}{\partial x} &= a \\ \phi &= ax + b\end{aligned}$$

Mit den Randbedingungen der Potentiale an den Platten:

$$\begin{aligned}\phi(x=0) &= \phi_1 \Leftarrow b = \phi_1 \\ \phi(x=d) &= \phi_2 \\ ad + b &= \phi_2 \\ a &= \frac{\phi_2 - \phi_1}{d} = -\frac{U}{d}\end{aligned}$$

Damit für das Potential im inneren des Plattenkondensators: ( $0 < x < d$ )

$$\phi = -\frac{U}{d} \cdot x + \phi_1 \quad (7.29)$$

### Elektrische Feldstärke

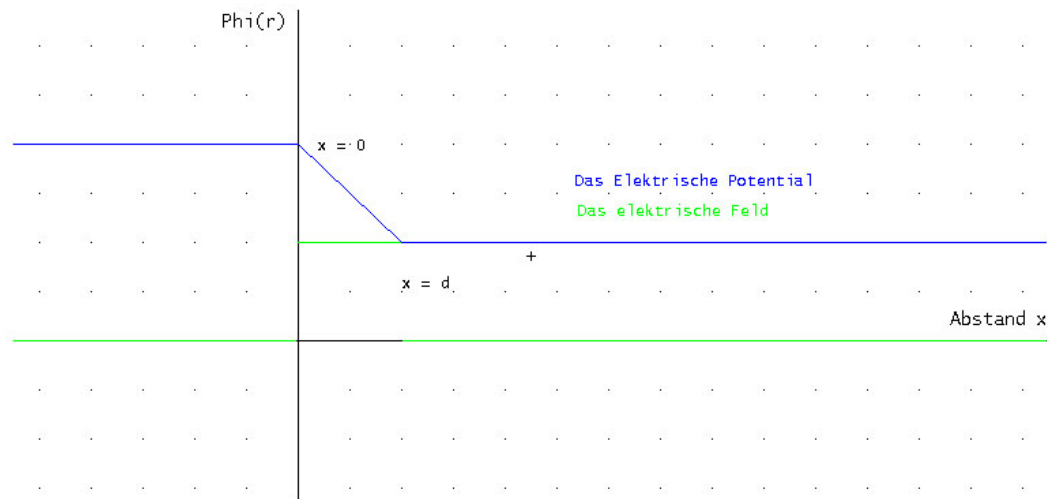
Es gilt:

$$\begin{aligned}\vec{E} &= -\text{grad}\phi \\ E &= -\frac{\partial\phi}{\partial x}\end{aligned}$$

Also für E im inneren des Plattenkondensators: ( $0 < x < d$ )

$$E = \frac{U}{d} \quad (7.30)$$

Da dieses Feld nicht von x abhängt, ist es ein homogenes Feld. Dies ist nicht mit einem konservativen Feld zu verwechseln.



### Fluss durch eine Platte

Wir berechnen den Fluss durch eine Platte:

$$\Phi_E = E \cdot A = \frac{U}{d} \cdot A$$

Dies ist der gesamte Fluss, da der Aussenraum feldfrei ist.

Mit dem Gausschen Gesetz erhält man:

$$E \cdot A = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{Q}{\epsilon_0 A} \quad (7.31)$$

Man sieht das Feld ist nicht vom Abstand der Platten abhängig. Dies kommt daher, dass das Feld durch die Ladungen erzeugt wird. Dies stimmt für als unendlich aufgefasste Platten.

Also bleibt das Feld bei verschiedenen Abständen konstant. Wenn man den Abstand der Platten verändert, verändert sich die Spannung. Also steigt die Spannung, wenn man die Platten auseinander zieht.

Also haben Plattenkondensatoren mit grossen Abständen eine kleiner Kapazität, als welche mit kleinem Abstand.

Die Platten sind unendlich gross, bedeutet der Abstand zwischen den Platten ist klein bezüglich ihres Durchmessers.

$$\frac{U}{d} \cdot A = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow C = \frac{Q}{U} = \epsilon_0 \cdot \frac{A}{d} \quad (7.32)$$

Das d steht im Nenner: je grösser die Distanz je kleiner die Kapazität. Je grösser die Fläche, je grösser die Kapazität.

### Arbeit zum Laden des Kondensators

Am Anfang sind beide Platten ungeladen. Man stellt sich das Laden jetzt so vor, dass man von einer Platte die Ladung  $\Delta Q$  auf die andere bringt. Bei jedem solchem Vorgang, steigt die Ladung der Platten, und deswegen die nötige Arbeit.

$$\begin{aligned} W_e &= \int_0^Q \underbrace{U}_{\frac{Q}{C}} \cdot dq = \frac{1}{C} \int_0^Q q \cdot dq \\ &= \underbrace{\frac{1}{C}}_{\frac{d}{\epsilon_0 A}} \frac{Q^2}{2} \end{aligned}$$

Wir erhalten somit:

$$W_e = \frac{1}{2} \frac{Q^2 d}{\epsilon_0 A} \quad (7.33)$$

Wenn man  $Q = C \cdot U$  einsetzt:

$$W_e = \frac{1}{2} C U^2$$

Diese Formel benötigen wir erst, bei den Spulen.

### Kraft zwischen den Platten

Wir haben eine positivgeladene und negativgeladene Platte, also muss es eine anziehende Kraft geben:

$$F = \frac{dW_e}{d(d)} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{\epsilon_0 A}$$

Durch einsetzen von  $Q = \underbrace{C}_{\epsilon_0 \frac{A}{d}} U = \epsilon_0 A \cdot \underbrace{\frac{U}{d}}_E = \epsilon_0 A E$ .

$$F = \frac{1}{2} Q \cdot \frac{Q}{\epsilon_0 A} = \frac{1}{2} \epsilon_0 A E \cdot \frac{Q}{\epsilon_0 A}$$

$$F = \frac{1}{2} Q E \quad (7.34)$$

Warum steht da der Faktor 1/2? Es gibt eine Schicht, wo die Ladungen in der Platte sind, in dieser verändert sich das Feld linear. Daher kommt das 1/2, weil das durchschnittliche Feld nur das halbe Feld des Innenraums ist.

Also unser E ist nicht, das Feld in den Platten, sondern das Feld zwischen den Platten.

Wir setzen nochmals ein:

$$F = \frac{1}{2} Q \cdot E$$

$$Q = C U = \epsilon_0 \frac{A}{d} U$$

$$E = \frac{U}{d}$$

$$F = \frac{1}{2} \epsilon_0 \frac{A}{d^2} U^2 \quad (7.35)$$

Man kann sich mit diesem Zusammenhang die Spannung aus rein mechanischen Grössen bestimmen. Oder bei konstanter Spannung die elektrische Feldkonstante  $\epsilon_0$  bestimmen. Deswegen heisst ein solches System: absolutes Elektrometer.

### Energie im Kondensator

$$W_e = \frac{1}{C} \frac{Q^2}{2}$$

Durch Einsetzen:

$$\begin{aligned} C &= \epsilon_0 \frac{A}{d} \\ Q &= CU = \epsilon_0 A \underbrace{\frac{U}{d}}_E = \epsilon_0 AE \\ W_e &= \frac{1}{2} \frac{d}{\epsilon_0} \epsilon_0^2 A^2 E^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 \cdot \underbrace{A \cdot d}_{Vol.} \cdot E^2 \end{aligned}$$

Wir haben also:

$$W_e = \frac{1}{2} \epsilon_0 \cdot A \cdot d \cdot E^2 \quad (7.36)$$

Das  $A \cdot d$  ist das Volumen zwischen den Platten. Also das Volumen des Feldes. Deswegen kann man davon ausgehen, dass der Energiegehalt im elektrischen Feld steckt. (weil das Ganze mit dem Volumen des Feldes steckt).

#### Energiedichte des elektrischen Feldes

$$w_e = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \quad (7.37)$$

### 7.5.5 Kombination von Kondensatoren

Wir betrachten, was passiert wenn wir mehrere Kondensatoren zusammenschalten. Besonders wichtig ist die **Parallel- und Serienschaltung**.

#### Parallelschaltung

An einer Spannungsquelle hängen die Kondensatoren mit den Kapazitäten  $C_1, C_2, C_3, \dots$ . Kann dieses System durch einen einzelnen Kondensator beschrieben werden?

Am ersten Kondensator liegt die Ladung  $Q_1$ , am zweiten  $Q_2$ , ... Die Gesamtladung ist also:  $Q = \sum_i Q_i$ . Es gilt:  $Q_i = C_i \cdot U_0$ . Die Gesamtkapazität des Systems definieren wir als:  $Q = C \cdot U_0$ . Also  $C \cdot U_0 = \sum_i C_i \cdot U_0$ . Also:

$$C = \sum_i C_i \quad (7.38)$$

Man schliesst die Platten also praktisch zu einem Grossen zusammen.

*(Dies ist ein Unterschied zu den Widerständen, bei dem dies bei Serienschaltung gelten würde.)*

#### Serienschaltung

Wir haben eine Gesamtspannung  $U_0$ , an dieser liegen mehrere Kondensatoren mit Kapazitäten  $C_1, C_2, C_3, \dots$  in Serie. Da die mittleren Kondensatoren sich nur durch Influenz laden können, müssen sie alle die gleiche Ladung  $Q$  haben. Aus den unterschiedlichen Kapazitäten der Kondensatoren, folgt, dass an den Kondensatoren verschiedene Spannungen liegen werden. Also  $U_0 = \sum_i U_i$ . Es

gilt:  $U_i = Q/C_i$ . Für den Gesamtkondensator würde gelten:  $U_0 = Q/C$ . Hiermit ergibt sich für die Gesamtkapazität:

$$\frac{1}{C} = \sum_i \frac{1}{C_i} \quad (7.39)$$

*(Dies werden wir bei den Widerständen, bei der Parallelschaltung erleben.)*

### 7.5.6 Erhöhung der Kapazität

Man überlegt sich, wie kann man die Kapazität von Kondensatoren erhöhen. Wir kennen als erste Möglichkeit, den Abstand zwischen den Kondensatorplatten zu verkleinern.

Es gibt die Möglichkeit Isolatoren zwischen die Kondensatorplatten zu tun.

#### Experiment

Bei einer Glasplatte (die den Raum nicht ganz auffüllt), sinkt die Spannung ein bisschen. Wenn jetzt die Kondensatorplatten, die Glasplatte fast berühren, sieht man die Spannung fällt stark, und nach entfernen der Glasplatte, steigt sie wieder.

Bei Plexiglas ist der Effekt nicht so gross. Also man sieht das Verhalten hängt vom Medium ab. Also die Kapazität des Kondensators, hängt vom Medium zwischen den Kondensatoren ab.

#### Erklärung

Da die Ladungen erhalten bleiben, muss sich das elektrische Feld verändern. Also muss die Anwesenheit eines Körpers in einem elektrischen Feld, dieses verändern.

Wir kennen schon die Influenz bei Leitern. Bei diesen ist das Feld weg im Innenraum. Wenn wir einen Leiter zwischen die Platten bringen würden, würde die Spannung zusammenbrechen, da der Raum des Feldes stark verkleinert werden würde. Allerdings geht dies technisch schlecht.

Bei einem Isolator, richten sich die Moleküle im Isolator aus. Entweder sind die Moleküle schon Dipole, oder sie werden induziert. Dies führt zu keine Leitung, da sich Moleküle nur ausrichten. Im Inneren gleichen sich die Ladungen der Moleküle aus. An den Randzonen gibt es eine Polarisierung, die der Ladung einer Kondensatorplatte entgegengesetzt ist. Hierdurch wird das Feld geschwächt. Also wird die Spannung kleiner.

Das Feld bricht deswegen nicht ganz zusammen, aber es wird geringer.

Die verschiedenen Verhalten der Materiellen, können durch die verschiedenen Arten von Molekülen in einem Isolator erklärt werden.

Das Medium zwischen den Kondensatoren wird Dielektrikum genannt. Das  $\epsilon$  bedeutet, das Feld geht durch.

## 7.6 Elektrische Eigenschaften von Materie

### 7.6.1 Elektrische Dipole

Ein Dipol besteht aus 2 Ladungen (+Q, -Q) mit einem Abstand  $\vec{d}$ . Der Ursprung des Koordinaten Systems liegt in der Mitte von  $\vec{d}$ . Die Gesamtladung ist 0, also tritt kein Feld aus dem Dipol aus.

#### Dipolmoment

Dieses ist definiert durch:

$$\vec{p} = Q \cdot \vec{d} \quad (7.40)$$

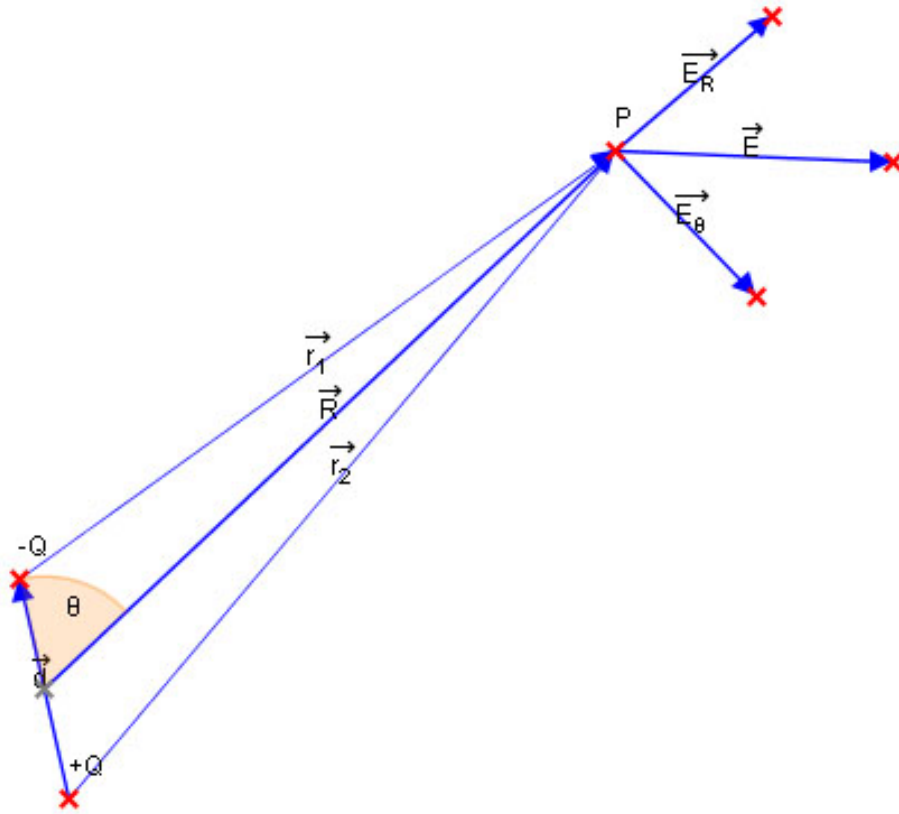
Was passiert an einem Punkt P weit weg vom Dipol? Wie gross ist da das elektrische Feld?

Da die Grundgleichungen der Elektrostatik linear sind, gilt das Superpositionsprinzip, also kann man die Lösungen addieren.

Der Punkt P hat den Koordinatenvektor  $\vec{R}$ ,  $\vec{d}$  und  $\vec{R}$  schliessen einen Winkel  $\vartheta$  ein.  $\vec{r}_1 = \vec{R} - \vec{d}/2$  und  $\vec{r}_2 = \vec{R} + \vec{d}/2$  beschreiben den Abstand des Punktes P. Wir beschreiben den Feldvektor  $\vec{E}$  im Punkt P durch die Vektoren  $E_r$  in radialer Richtung von  $\vec{R}$ , durch  $E_\vartheta$  und  $E_\varphi$ . Dies sind Kugelkoordinaten.  $E_r$  zeigt in Richtung zunehmenden Radius.  $E_\vartheta$  zeigt in Richtung zunehmenden Winkels  $\vartheta$ .

In der Skizze ist wegen meines Zeichenprogramms  $\vartheta$  durch  $\theta$  symbolisiert.





### Gesamtpotential in P

Wegen Superpositionsprinzip:

$$\phi(\vec{R}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{\underbrace{|\vec{R} - \vec{d}/2|}_{|\vec{r}_1|}} - \frac{1}{\underbrace{|\vec{R} + \vec{d}/2|}_{|\vec{r}_2|}} \right)$$

Falls  $|\vec{R}| \gg |\vec{d}|$ . Näherungsweise erhalten wir:

$$(\ ) \approx \frac{\vec{R} \cdot \vec{d}}{R^3}$$

Wir erhalten also:

$$\begin{aligned} \phi(\vec{R}) &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{R} \cdot \vec{d}}{R^3} \\ &= \frac{\vec{p} \cdot \vec{R}}{4\pi\epsilon_0 R^3} \\ &= \frac{pR \cos \vartheta}{4\pi\epsilon_0 R^3} \end{aligned}$$

Also:

$$\phi(\vec{R}) = \frac{p \cos \vartheta}{4\pi\epsilon_0 R^2} \quad (7.41)$$

Man erkennt:  $\phi \propto 1/R^2$ !

Mit dem Zusammengen  $\vec{E} = -\text{grad}\phi$

$$\vec{E} = -\text{grad}\phi = \begin{pmatrix} -\partial\phi/\partial R \\ -1/R \cdot \partial\phi/\partial\vartheta \\ -1/(R \sin\vartheta) \cdot \partial\phi/\partial\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2p \cos\vartheta}{4\pi\epsilon_0 R^3} \\ \frac{p \sin\vartheta}{4\pi\epsilon_0 R^3} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Hierbei betrachtet man grosse Distanzen. Also kann das Feld, unmittelbar um den Dipol nicht mit der Formel beschrieben werden. Die Formel gilt also nur für das Fernfeld und nicht für das Nahfeld.

### Dipol in einem Elektrischen Feld

$\phi_a$  Potential des äusseren Feldes,  $\vec{E}_{(a)}$  Feld des äusseren Feldes.

Es wird ein Drehmoment auf den Dipol wirken:  $\vec{N} = \vec{r}_1 \times (Q \cdot \vec{E}_{(a)}) + \vec{r}_2 \times (-Q \vec{E}_{(a)}) = Q(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{E}_{(a)}$ .

Also,

$$\vec{N} = \vec{p} \times \vec{E}_a \quad (7.42)$$

Wenn das Dipolmoment parallel zum äusseren Feld ist, gibt es kein Drehmoment mehr. Also wird sich dieser so einstellen.

### 7.6.2 Dielektrika im elektrischen Feld

Die Moleküle eines Dielektrikas haben Dipolwirkung. Im Gegensatz zu Leitern tritt das Feld durch die Dielektrika

#### Betrachtung

Wir betrachten das Ganze am Beispiel des Plattenkondensators. Zwei Platten mit Ladung  $+Q$  und  $-Q$ , dazwischen ist ein elektrisches Feld. Wenn im Kondensator nichts ist, nennen wir die Feldstärke  $\vec{E}_{\text{Vakuum}}$ . Wollen beziehung zwischen Ladung der Platten und der Feldstärke.

$$\begin{aligned} \text{div} \vec{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \Phi_E &= \frac{Q}{\epsilon_0} \end{aligned}$$

Im Fall des Plattenkondensators:

$$\begin{aligned} \Phi_E &= |\vec{E}_{\text{vec}}| \cdot A \\ |\vec{E}_{\text{vac}}| \cdot A &= \frac{Q}{\epsilon_0} \end{aligned}$$

$$|\vec{E}_{\text{vac}}| = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma \quad (7.43)$$

$\sigma$  ist die Flächenladungsdichte gegeben durch  $\sigma = Q/A$

### Dielektrikum zwischen den Platten

Wir haben jetzt einen Körper zwischen den beiden Kondensatorplatten. Dieser Körper ist das Dielektrikum, besteht aus Dipolen, die sich im Feld ausrichten. Wir werden jetzt eine andere elektrische Feldstärke  $\vec{E}_{\text{did}}$  haben.

Wir brauchen beim Dielektrikum nur die Randzonen (**Polarisationszonen**) betrachten, da im Inneren Ladungsausgleich herrscht. Durch diese wird das Feld im Inneren abgeschwächt.

**Polarisation des Dielektrikums pro Volumeneinheit**

Wir summieren die Dipolmomente  $\vec{d} = q \cdot \vec{p}$  und erhalten die Polarisation des Dielektrikums pro Volumeneinheit gegeben durch

$$\vec{P} = 1/V \sum_i \vec{p}_i \quad (7.44)$$

Wir nehmen an, dass alle  $\vec{p}$  parallel sind. Wir können also auf die Beträge übergehen. Wir erhalten nun:

$$|\vec{P}| = N \cdot |\text{vecp}| = N \cdot q \cdot d \quad (7.45)$$

N: Anzahl der Moleküle pro Volumeneinheiten.

Wir können uns die Situation also als Kondensator im Kondensator vorstellen. Wir nehmen an die Grenzschichten sind genau d dick.

**Polarisationsladung in der Grenzschicht:**  $Q_{Pol} = \underbrace{A \cdot d}_{\text{Volumen d. Grenzschicht}} \cdot N \cdot q$

Damit: **Polarisationsflächenladungsdichte**  $\sigma_{Pol} = Q_{Pol}/A = N \cdot \underbrace{q \cdot d}_{|\vec{p}|} = |\vec{P}|$ .

Also

$$\sigma_{Pol} = \vec{P} \quad (7.46)$$

Damit **Polarisationsfeldstärke**

$$|E_{Pol}| = \frac{\sigma_{Pol}}{\epsilon_0} = \frac{|\vec{P}|}{\epsilon_0}$$

Die Polarisationsfeldstärke geht von + nach - und die Richtung der Polarisation von - nach +. Also sind die beiden entgegengesetzt.

$$\vec{E}_{pol} = -\frac{\vec{P}}{\epsilon_0} \quad (7.47)$$

Damit:

$$\vec{E}_{diel} = \vec{E}_{vac} + \vec{E}_{pol} = \vec{E}_{vac} - \frac{\vec{P}}{\epsilon_0} \quad (7.48)$$

**Konkrete Berechnung von  $\vec{E}_{diel}$** 

Arten von Polarisation

- Verschiebungspolarisation: (Die Moleküle haben erst mit Anlegen eines Feldes einen Dipol). Wir sprechen von induzierten Dipolen.
- Orientierungspolarisation: Die Moleküle sind schon Dipole, diese werden dann durch das äussere Feld orientiert. Dies sind dann permanente Dipole.

Meistens tritt beides gleichzeitig auf. Wir gehen jetzt von Verschiebungspolarisation aus.

$$\vec{p} = \alpha \cdot \vec{E}_{diel} \quad (7.49)$$

$\alpha$  ist die Polarisierbarkeit. Dies ist eine Materialeigenschaft. Es gilt  $\alpha > 0$ . Damit:

$$\begin{aligned} \vec{P} &= N \cdot \vec{p} = \underbrace{N \cdot \alpha}_{const.} \cdot \vec{E}_{diel} \\ \vec{P} &= \underbrace{\epsilon_0 \cdot \chi_e}_{const.} \cdot \vec{E}_{diel} \\ \chi_e &= \frac{N \cdot \alpha}{\epsilon_0} \end{aligned}$$

$\chi_e$  ist eine dielektrische Suszeptibilität. Da  $N > 0$  und  $\alpha > 0$ , ist  $\chi_e > 0$ .

Damit für die **Beziehung mit dem Vakuumfeld**

$$\begin{aligned} \vec{E}_{diel} &= \vec{E}_{vac} - \frac{\vec{P}}{\epsilon_0} = \vec{E}_{vac} - \frac{1}{\epsilon_0} \epsilon_0 \chi_e \cdot \vec{E}_{diel} \\ \vec{E}_{diel} + \chi_e \cdot \vec{E}_{diel} &= \vec{E}_{vac} \\ \vec{E}_{diel} \cdot (1 + \chi_e) &= \vec{E}_{vac} \\ \vec{E}_{diel} &= \underbrace{\frac{1}{1 + \chi_e}}_{\epsilon_r} \vec{E}_{vac} \end{aligned}$$

$\epsilon_r = 1 + \chi_e > 1$  ist die relative Dielektrische Konstante.

$$\vec{E}_{diel} = \frac{1}{\epsilon_r} \vec{E}_{vac} \quad (7.50)$$

Da  $1/\epsilon_r < 1$  ist das dielektrische Feld immer kleiner als das Vakuumfeld.

$$\epsilon_r = 1 + \chi_e = 1 + \frac{N\alpha}{\epsilon_0} \quad (7.51)$$

Diese Konstante wird gemessen.

Das Dielektrikum bewirkt:

- Verringerung des elektrischen Feldes  $\vec{E}$ .
- Verringerung der Spannung  $U = |\vec{E}| \cdot d$
- Erhöhung der Kapazität  $C = Q/U$

**Typische Werte von  $\epsilon_r$ :**

Quarzglas	3.75
Porzellan	6 - 7
Kupferoxid	18
Titanoxid	$\approx 80$
Benzol	2.3
Ethylalkohol	25.8
Wasser	81 (statisch)
Luft	1.00058

### 7.6.3 Freie Ladungen

Wir untersuchen den Zusammenhang des elektrischen Feldes mit den freien Ladungen.

Wir gehen vom Vakuumkondensator aus:

$$\text{Maxwell Gleichung } \text{div} \vec{E}_{vac} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$\rho$  sind die freien Ladungen.

#### Dielektrische Verschiebung

**Definition**

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}_{vac} = \underbrace{\epsilon_0 \epsilon_r}_{=\epsilon} \vec{E}_{diel} \quad (7.52)$$

Dieses  $\vec{D}$  bezieht sich eigentlich nur auf die freien Ladungen auf dem Kondensator. Deswegen ist dieser von der Anwesenheit von Dielektrika unabhängig (Beweis soll später folgen). Aber das  $\vec{D}$ -Feld kann dadurch verändert werden, dass die freien Ladungen, durch die Anwesenheit von einem

Dielektrika verändert werden können.

$\epsilon = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r$ : Dielektrizitätskonstante.

Damit durch einsetzen in die Maxwellgleichung:

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho \quad (7.53)$$

Die Dichte der freien Ladungen ist die Quelle des  $\vec{D}$ -Feldes.

### Bemerkung

Verhalten bei Abwesenheit von freien Ladungen.:

$$\begin{aligned} \rho &= 0 \\ \operatorname{div} \vec{D} &= 0 \\ \operatorname{div}(\epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot \vec{E}) &= 0 \\ \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot \operatorname{div} \vec{E} + \vec{E} \epsilon_0 \operatorname{grad} \epsilon_r &= 0 \end{aligned}$$

Angenommen wir haben ein inhomogenes Medium, dann gilt  $\operatorname{grad} \epsilon_r \neq 0 \Rightarrow \operatorname{div} \vec{E} \neq 0$ . Dies deutet wieder auf die Polarisationsladungen hin. Dies ist der erste Unterschied zwischen  $\vec{D} = 0$  und  $\vec{E} \neq 0$

$$\begin{aligned} [\rho] &= \left[ \frac{A \cdot s}{m^3} \right] \\ [\vec{D}] &= \left[ \frac{A \cdot s}{m^2} \right] \end{aligned}$$

Dies gilt nur in isotropen Medien. Aber wir betrachten nur solche.

### Stetigkeitsbedingungen an Grenzflächen

Wir betrachten eine Grenzfläche zwischen zwei Medien, die mit einem elektrischen Feld durchsetzt wird.

#### 1. Dielektrische Verschiebung

An den Grenzflächen sind keine freien Ladungen. Also  $\rho = 0$ . Hierdraus folgt  $\operatorname{div} D = 0$  Also  $\iiint_V \operatorname{div} D dv = 0$  Nach dem Gausschen Satz:  $\oint_{Rd(v)} \vec{D} \cdot d\vec{f} = 0$ .

Wir betrachten die Grenzfläche. Oben ist dielektrizitäts Konstante  $\epsilon_1$  unten  $\epsilon_2$ . Wir betrachten einen Zylinder mit Volumen  $\Delta V$ , der die Grenzfläche mit einschliesst. Der Grenzfläche nach oben entspricht ein Flächenvektor  $d\vec{f}_1$ , nach unten gibt es entsprechend den Flächenvektor  $d\vec{f}_2$ . Diese beiden zeigen nach Aussen.

Wir betrachten ein Feld, das senkrecht auf die Grenzfläche steht. Dieses zeigt von oben nach unten.

Wir betrachten die D-Vektoren. Wir haben den Vektor  $D_{\perp 1}$  im oberen Teil, und  $D_{\perp 2}$  im unteren.

Es wird gelten:  $d\vec{f}_2 = -d\vec{f}_1$ .

Flächenintegral über den Zylinder. Mantelfläche liefert keinen Beitrag, da die Feldvektoren senkrecht darauf steht. Es bleiben nur die Beiträge von der Deck- und Oberflächen.

$$\begin{aligned} D_{\perp 1} \cdot d\vec{f}_1 + D_{\perp 2} \cdot d\vec{f}_2 &= 0 \\ D_{\perp 1} \cdot d\vec{f}_1 - D_{\perp 2} \cdot d\vec{f}_1 &= 0 \\ D_{\perp 1} &= D_{\perp 2} \end{aligned}$$

Dies ist die Stetigkeit der Normalkomponenten des  $\vec{D}$ -Feldes.

Also gilt:

$$\epsilon_1 E_{\perp 1} = \epsilon_2 E_{\perp 2}$$

$$E_{\perp 2} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} E_{\perp 1} \quad (7.54)$$

2. **Elektrische Feldstärke:**  $\vec{E}$  konservativ  $\Rightarrow \vec{E} = \text{grad}\phi$

$$\text{rot}\vec{E} = 0 \Rightarrow \oint_{\text{Rd}(A)} \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$$

Wir betrachten ein schmales Rechteck mit Fläche  $\Delta A$  als Weg.  $d\vec{s}_1$  ist die Oberseite,  $d\vec{s}_2 = -d\vec{s}_1$  ist die Unterseite. Betrachten Feld parallel zur Grenzfläche. Wir haben also  $\vec{E}_{||1}$  und  $\vec{E}_{||2}$ .

$$\begin{aligned} \vec{E}_{||1} \cdot d\vec{s}_1 + \vec{E}_{||2} \cdot d\vec{s}_2 &= 0 \\ \vec{E}_{||1} \cdot d\vec{s}_1 - \vec{E}_{||2} \cdot d\vec{s}_1 &= 0 \\ \vec{E}_{||1} &= \vec{E}_{||2} \end{aligned}$$

Dies ist die Stetigkeit der Tangentialkomponente des  $\vec{E}$ -Feldes.  
für  $\vec{D}$  folgt hiermit:

$$\begin{aligned} \frac{\vec{D}_{||1}}{\epsilon_1} &= \frac{\vec{D}_{||2}}{\epsilon_2} \\ \vec{D}_{||2} &= \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \vec{D}_{||1} \end{aligned}$$

### Anschauliche Bedeutung

Wieder am alten Plattenkondensator

1. Im Inneren unseres Plattenkondensators ist in der Mitte ein Dielektrikum mit Freiräumen zwischen ihm und den Platten. Der  $\vec{D}$ -Vektor ist überall gleich gross. Der  $\vec{E}$ -Vektor ist im Inneren des Dielektrikums kleiner.
2. Elektrische Feldstärke: Wir betrachten einen Kondensator. Dielektrikum geht bis an den Rand, erfüllt aber nicht den ganzen Kondensator. Dies ist äquivalent mit 3 parallel geschalteten Kondensatoren, welche auf einheitlicher Spannung sind.  
Die freien Ladungen häufen sich dort wo das Dielektrikum ist. Der  $\vec{E}$ -Vektor ist immer der Gleiche.  $\vec{D}$  ist im Dielektrikum grösser als der  $\vec{E}$ -Vektor und im Vakuum gleichlang.

### Grenzflächen schräg zum Feld

Die hier auftretenden Phänomene sind analog zu der Berechnung in der Optik.

#### 1. $\vec{D}$ -Linien:

Wir betrachten was passiert mit den  $\text{vec}D$ -Linien nach durchtritt durch eine Grenzschicht von  $\epsilon_1$  nach  $\epsilon_2 > \epsilon_1$ . Wir spalten  $\text{vec}D_1$  in Normal- und Tangentialkomponenten:  $D_{||1}, D_{\perp 1}$ . Die Normalkomponente ist stetig also  $D_{\perp 2} = D_{\perp 1}$ . Die Tangentialkomponente wird länger  $D_{||2} > D_{||1}$ .

$$\begin{aligned} \tan \alpha &= \frac{|D_{||1}|}{|D_{\perp 1}|} \\ \tan \beta &= \frac{|D_{||2}|}{|D_{\perp 2}|} \\ \frac{\tan \alpha}{\tan \beta} &= \frac{D_{||1}/D_{\perp 1}}{D_{||2}/D_{\perp 2}} = \frac{D_{||1}}{D_{||2}} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \end{aligned}$$

**2.  $\vec{E}$ -Linien:**

Dies ist analog zu den  $\vec{D}$ -Linien, bis darauf, dass die Normalkomponenten stetig sind, und die Tangentialkomponenten variieren. Wir erhalten ein  $\vec{E}_{\perp 2} < \vec{E}_{\perp 1}$  und  $\vec{E}_{\parallel 2} = \vec{E}_{\parallel 1}$

$$\begin{aligned}\tan \alpha &= \frac{|\vec{E}_{\parallel 1}|}{|\vec{E}_{\perp 1}|} \\ \tan \beta &= \frac{|\vec{E}_{\parallel 2}|}{|\vec{E}_{\perp 2}|} \\ \frac{\tan \alpha}{\tan \beta} &= \frac{E_{\parallel 1}/E_{\perp 1}}{E_{\parallel 2}/E_{\perp 2}} = \frac{E_{\perp 2}}{E_{\perp 1}} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}\end{aligned}$$

Wir erhalten in beiden Fällen das gleiche Brechungsgesetz:

$$\frac{\tan \alpha}{\tan \beta} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \quad (7.55)$$

Dies bedeutet, dass die Parallelität der  $\vec{E}$ - und  $\vec{D}$ -Linien beim durchtritt einer Grenztritt erhalten bleibt.

An der Grenzfläche sind keine freien Ladungen  $\Rightarrow \operatorname{div} \vec{D} = 0$ . Da  $\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \cdot \vec{E}$ , wird  $\operatorname{div} \vec{E} \neq 0$ , deswegen kann die Grenzfläche eine Quelle des  $\vec{E}$ -Feldes sein.

**Symbolisch bedeutet dies:** An der Grenzfläche sind die  $\vec{D}$ -Linien durchgehen. Hingegen gibt es  $\vec{E}$ -Linien, die an der Grenzfläche entspringen oder enden.

**Messung von E und D**

Ohne Medium können wir einfach die Kraft auf eine Probeladung in dem Feld messen.

Jetzt wollen wir das  $\vec{E}$ - und  $\vec{D}$ -Feld in einem Dielektrikum in einem Kondensator messen. Wir messen das  $\vec{E}$ -Feld in dem wir die Kraft auf eine Probeladung in einem schmalen Längsschlitz im Dielektrikum. Dies geht, da die Tangentialkomponente stetig ist.

Zur Messung des  $\vec{D}$ -Feldes verwenden wir einen Querschlitz, da die Normalkomponente stetig ist. Wir messen jetzt analog die Kraft auf eine Ladung q. Wir erhalten  $\vec{D} = \epsilon_0 \cdot \vec{E}$ .

**7.6.4 Dielektrische Verschiebung****Gedanken Experiment**

Wir haben einen Kondensator mit einem Gefäß mit einer Flüssigkeit (z.B. Wasser drin). Man macht den Versuch der Ladungstrennung innerhalb und ausserhalb der Flüssigkeit. Dadurch dass die Platten die Flüssigkeit verdrängen entsteht dort ein Querschlitz. Also bleibt dort der  $\vec{D}$ -unverändert, also ist die Situation für die Platten inner- und ausserhalb der Flüssigkeit. Man erwartet also, dass die Influenzwirkung überall gleich ist. Deswegen heisst der  $\vec{D}$ -Vektor der Vektor der dielektrischen Verschiebung.

**7.6.5 Dielektrische Verschiebung**

Der Vektor  $\vec{D}$  wird als dielektrische Verschiebung bezeichnet.

**Formale Auswirkungen**

Im Vakuum:  $\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \Rightarrow \operatorname{div} \epsilon_0 \vec{E} = \rho$ .

Im Dielektrikum:  $\operatorname{div} \vec{D} = \rho \Rightarrow \operatorname{div} \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} = \rho$ .

Also  $\epsilon_0 \rightarrow \epsilon_0 \cdot \epsilon_r$  für die Umwandlung der Formeln aus dem Vakuum in das Dielektrikum.

**Coulomb-Gesetz**

$$|\vec{F}| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 \cdot \epsilon_r} \cdot \frac{q_1 q_2}{r^2} \quad (7.56)$$

Hier sieht man, warum sich Ionen in wässrigen Lösungen leichter bilden, da die Wechselwirkungskraft geringer ist.

**Feldstärke**

$$|\vec{E}| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 \cdot \epsilon_r} \cdot \frac{q}{r} \quad (7.57)$$

**Kapazität**

$$C = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot \frac{A}{d} \quad (7.58)$$

**Energiedichte**

$$w_e = \frac{1}{2} \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \vec{E}^2 = \frac{1}{2} \underbrace{\epsilon_0 \epsilon_r \vec{E}}_{\vec{D}} \vec{E} = \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D} \quad (7.59)$$

**7.7 Elektrostatische Effekte****7.7.1 Elektrostriktion / Piezoeffekt**

Wir haben ein Seignette-Salz Kristall. Dieser hat auf der Ober- und unterseitealuminumelektroden. Dieser erzeugt durch mechanische Kräfte auf ihn, Spannungen. Durch Belastung eines solchen Kristalls entstehen Spannungen. Diese ist proportional zur deformierenden Kraft. Man kann so elektrostatische Waagen bauen.

**7.7.2 Ferroelektrizität**

Durch die Wechselwirkung in einem Kristall kommt es zu einer spontanen Polarisierung dieser. Diese können dann zum Teil erhalten bleiben. Dies ist ein Hysterese Effekt. Es bleibt eine Restpolarisierung übrig. Man kann so eine permanente Polarisierung erzeugen. Aber dies ist nicht so ausgeprägt wie der Ferromagnetismus.



# Kapitel 8

## Elektrische Ströme

Man sieht bewegte Ladungen haben zusätzliche Kräfte. Galvani entdeckte erste Galvanische Zelle. Faraday entdeckte, dass sich gleichsinnig stromdurchflossende Leiter anziehen. Experimentell kann dies nicht mit bewegten Ladungen gezeigt werden, da diese viel zu gross sein müssten. Deswegen nehmen wir Dinge wie Strommessgeräte als gegeben an. Die Erklärung folgt später. Wir nehmen auch Stromquellen als gegeben an, wie zum Beispiel die Froschschenkel von Galvani.

### 8.1 Realisierung von Strömen

- Bewegung von Ladungsträgern im Vakuum. (Elektronenstrahlen in Röhren)
- Ladunstransport in Leitern
  - Elektronische Leiter (Elektronen bewerkstelligen den Ladungstransport): Metalle, Halbleiter
  - Ionenleiter: Elektrolyte (positiv und/oder negativ Ladungen werden durch Ionen in wässrigen Lösungen transportiert)
  - gemischte Leiter: Gaseentladungen, Plasmen

#### 8.1.1 Beschreibung von Strömen

##### Elektrische Stromstärke

Die elektrische Stromstärke ist definiert durch:

$$I = \frac{dQ}{dt} \quad (8.1)$$

Daher erhält man  $[I] = [C/s] = [A]$ . Heute definiert durch die Kraftwirkung von parallelen Strömen aufeinander.

##### Elektrische Stromdichte

Stromstärke pro senkrechte Querschnittsflächeneinheiten. Diese nennen wir  $\vec{j}$ , diese gibt auch die Richtung des Stroms an. Wir erhalten als Dimension  $[\vec{j}] = [A/m^2]$ . Und für den Strom durch eine Fläche A:

$$I = \iint_A \vec{j} \cdot d\vec{f} \quad (8.2)$$

Im Gegensatz zur Statik bewegen sich hier wirklich Ladungen.

Ladungsdichten und Stromdichten sind die wesentlichen Größen, für die Darstellung des elektromagnetischen Feldes. Man erhält für die Stromdichte ähnliche Gleichungen wie für die Ladungsdichten.

### 8.1.2 Zusammenhang Ladungsdichte und Stromdichte

Wir betrachten einen Leiter, mit  $n$  Ladungen  $q$  pro Volumen. Diese bewegen sich mit der Geschwindigkeit  $\vec{v}$ . Wir betrachten nun die Leiterquerschnittsfläche  $\vec{A}$ . Dieser steht senkrecht auf die Fläche und seine Länge gibt den Flächeninhalt an.

- $n$  Anzahl der Ladung  $q$  pro Volumen
- $\vec{v}$  Geschwindigkeiten der Ladungen  $q$
- $\vec{A}$  Leiterquerschnittsfläche

#### Darstellung des Stroms

$$\begin{aligned} I &= \underbrace{n \cdot q}_{\rho} \cdot \underbrace{\vec{v} \cdot \vec{A}}_{\text{Vol. pro Zeiteinh.}} \\ &= \vec{j} \cdot \vec{A} \end{aligned}$$

Damit:

$$\vec{j} = \rho \vec{v} \quad (8.3)$$

Die technische Stromrichtung, ist die Bewegung von positiven Ladungen.

#### Geschwindigkeit in einem Leiter

Wir berechnen uns die Geschwindigkeit von Ladungsträgern in einem Leiter. Wir berechnen die mittlere Driftgeschwindigkeit von  $e^-$  in einem metallischen Leiter:

- Cu-Draht:  
 Querschnitt:  $0.1 \text{ mm}^2 = 10^{-7} \text{ m}^2$   
 Strom:  $I = 1 \text{ A}$   
 Elementarladung:  $q = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$   
 Abschätzung von  $n$ : 1 Leitungs  $e^-$  pro Cu-Atom  
 $M$  = Masse / kmol  
 $N_A = 6 \times 10^{26} / \text{kmol}$  = Anzahl der Moleküle / kmol  
 $N/N_A$  = Masse eines Cu-Atoms.  
 $\rho_m / (N/N_A) = \text{Anzahl der Cu-Atome} / \text{Vol} = n$

$$I = \frac{I}{n \cdot q \cdot A}$$

$$I = \frac{IM}{\rho_m N_A \cdot e \cdot A} = \frac{1 \cdot 63.5}{8.93 \times 10^3 \cdot 6 \times 10^{26} \cdot 1.6 \times 10^{-19} \cdot 10^{-7}} \approx 1 \text{ mm/s}$$

Das elektrische Feld breitet sich hingegen deutlich schneller aus.

### 8.1.3 Erhaltung der Ladung

Wir betrachten ein Volumen  $V$  im Leiter.  $Q$  ist die Gesamtladung der Ladungsträger im Volumen  $V$ . Austritt aus dem Volumen:

$$\begin{aligned} \oiint_{Rd(V)} \vec{j} \cdot d\vec{f} &= -\frac{dQ}{dt} \\ \iiint_V \text{div} \vec{j} \cdot dv &= -\frac{d}{dt} \iiint_V \rho \cdot dv = -\iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dv \\ \text{div} \vec{j} &= -\frac{\partial \rho}{\partial t} \end{aligned}$$

Hiermit die Kontinuitätsgleichung:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} = 0 \quad (8.4)$$

## 8.2 Elektrischer Widerstand, elektrische Leitfähigkeit

Für isotrope Leiter gilt, die Stromdichte ist proportional zum angelegten Feld. Also:

### 8.2.1 Ohmsche Gesetz

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} \quad (8.5)$$

Das  $\sigma$  bezeichnet die **elektrische Leitfähigkeit**.

$$[\sigma] = \left[ \frac{A}{m^2} \frac{m}{V} \right] = \left[ \frac{A}{V \cdot m} \right] = [S \cdot m^{-1}]$$

S steht für Siemens.

#### Typische Werte

Stoff	Leitfähigkeit
Ag (Silver)	$62,5 \times 10^6 Sm^{-1}$
Cu (Kupfer)	59
Al	37
Fe	10
Kohle	0.01
Bernstein	$2 \times 10^{-15} Sm^{-1}$
Quarz	$10^{-18} Sm^{-1}$

#### Integrales Ohm'sche Gesetz

Betrachten: Zylindrischen homogenen Leiter, mit Querschnittsfläche A und eine Länge L und einer Leitfähigkeit  $\sigma$ .

$$\begin{aligned} \underbrace{j \cdot A}_I &= \sigma \cdot \underbrace{E}_{U/L} \cdot A \\ I &= \frac{\sigma A}{L} U \\ U &= I \cdot \underbrace{\frac{L}{\sigma A}}_R \end{aligned}$$

R ist der **elektrische Widerstand**.

$$U = R \cdot I \quad (8.6)$$

$$[R] = \left[ \frac{V}{A} \right] = [\Omega]$$

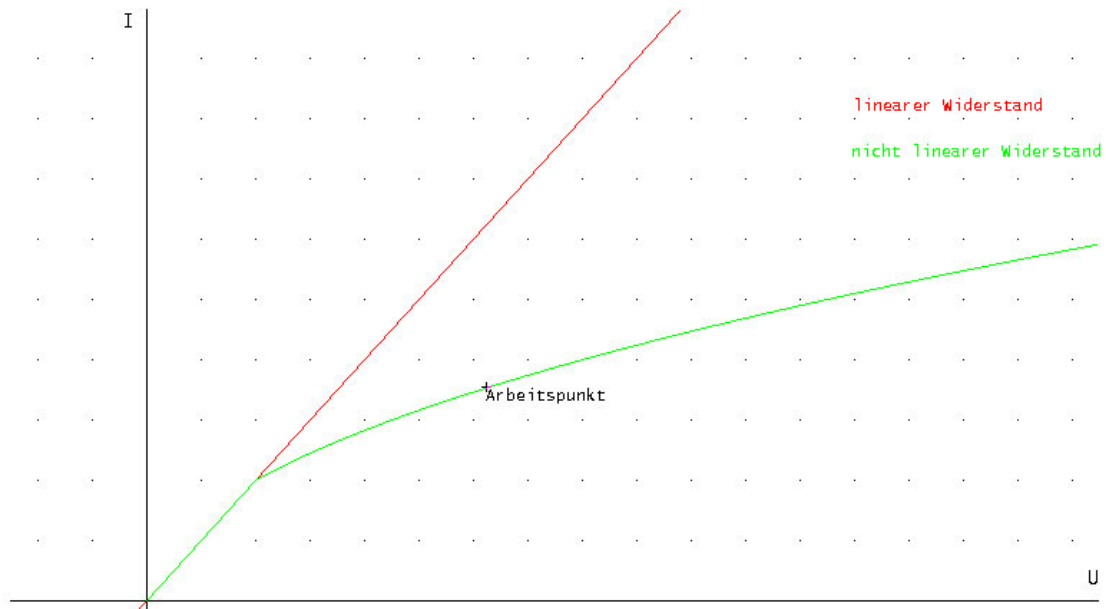
Hier fließt Strom, deswegen ist der Innenraum des Leiters nicht mehr feldfrei.

#### Spannungsteiler

Die Widerstände  $R_1(200\Omega)$ ,  $R_2(100\Omega)$ ,  $R_3(100\Omega)$  sind in Serie geschaltet. An ihnen liegt eine Spannung von 6.6 V. An  $R_1$  hat man einen Spannungsabfall von 1.6 V, an  $R_2$  1.7 V und an  $R_3$  3.3 V.

### Nicht lineare Widerstände

Widerstände müssen nicht konstant bleiben.



Für den Gewählten Arbeitspunkt hat  $R_D = dU/dI$ . Wir zeichnen Ohmsche Widerstände als rechteckige Kasteln.

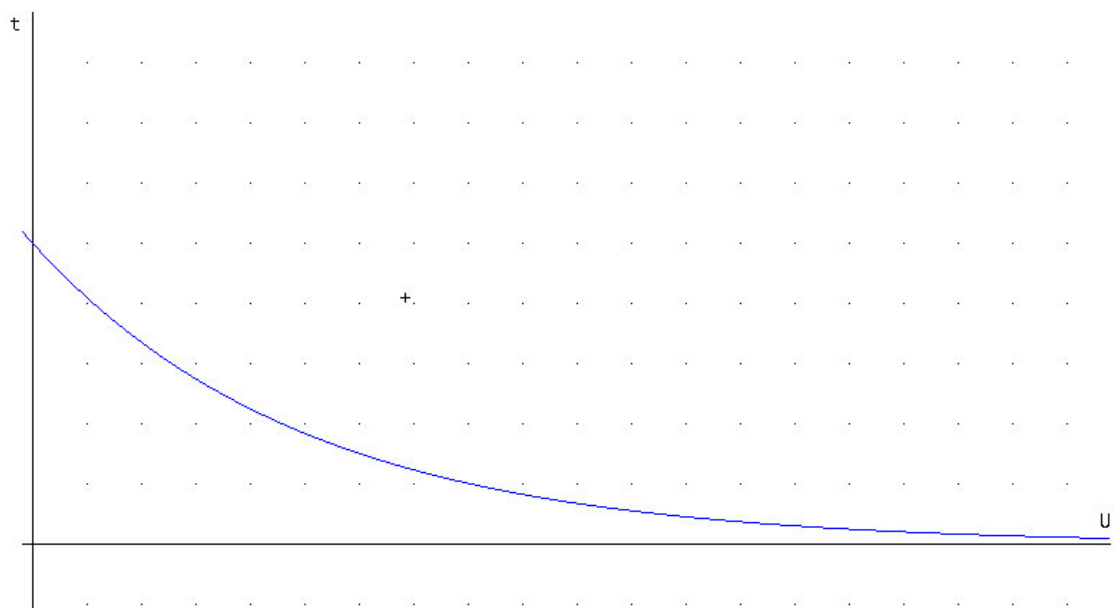
### 8.2.2 Aufladen eines Kondensators

Wir wollen das Aufladen eines Kondensators mit dem Ohmschengesetz beschreiben. Wir haben eine Spannungsquelle mit der Spannung  $U_0$ , einen Widerstand  $R$  nach dem wir die Stromstärke  $I$  messen, und einen Kondensator  $C$  zu dem ein Voltmeter mit gemessener Spannung  $U$  parallel geschaltet wird.

Voltmeter haben einen sehr hohen Innenwiderstand. Amperemeter einen sehr geringen.

$$\begin{aligned}
 Q &= C \cdot U \\
 \frac{dQ}{dt} &= C \cdot \frac{dU}{dT} \\
 I &= C \cdot \frac{dU}{dT} \\
 U &= U_0 - I \cdot R \\
 \frac{dU}{dT} &= -R \cdot \frac{dI}{dT} \\
 I &= -C \cdot R \cdot \frac{dI}{dT} \\
 dt &= -RC \frac{dI}{I} \\
 \underbrace{\int dt}_t &= -RC \underbrace{\int \frac{dI}{I}}_{\ln I} \\
 \int dI I &= -\frac{1}{RC} \cdot \int dt \\
 \ln I &= -\frac{t}{RC} + \text{const.} \\
 \text{Anfangsbedingung } I(t=0) &= I_0 \\
 \text{Damit } \ln I_0 &= \text{const.} \\
 \ln I &= -\frac{t}{RC} + \ln I_0 \\
 \ln \frac{I}{I_0} &= -\frac{t}{RC} \\
 \frac{I}{I_0} &= e^{-\frac{t}{RC}} \\
 I &= I_0 \cdot e^{-\frac{t}{RC}} \tag{8.7}
 \end{aligned}$$

Strom als Funktion der Zeit.



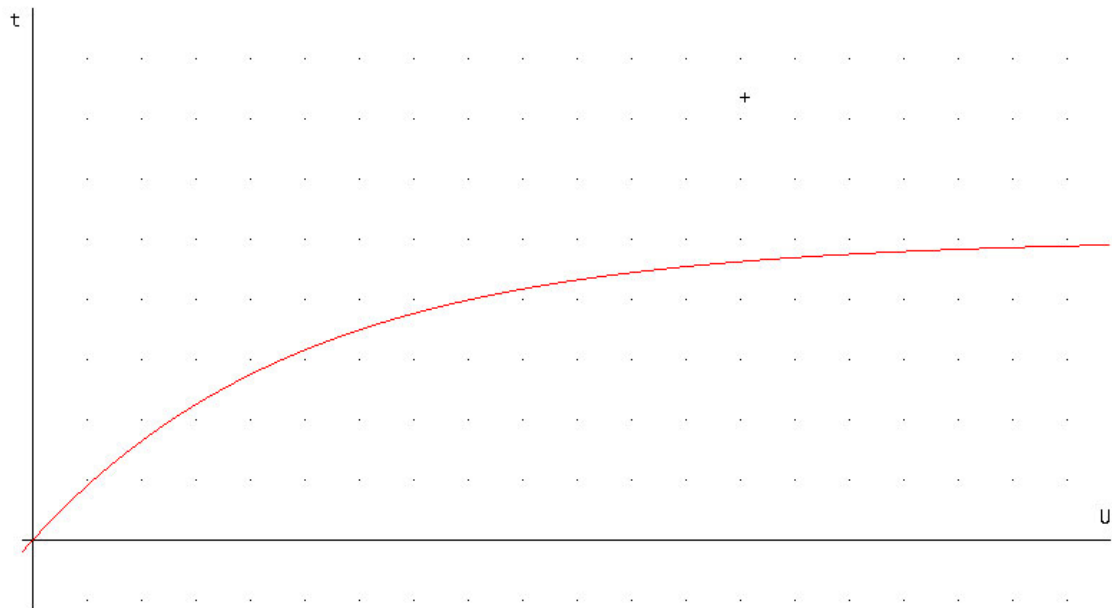
Nach der Zeit  $t = RC$  haben wir nur noch eine Stromstärke  $I = I_0/e$ .

### Bedeutung für die Spannung

$$U = U_0 - I \cdot R$$

$$U = U_0 - \underbrace{I_0 \cdot R}_{=U_0} \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$$

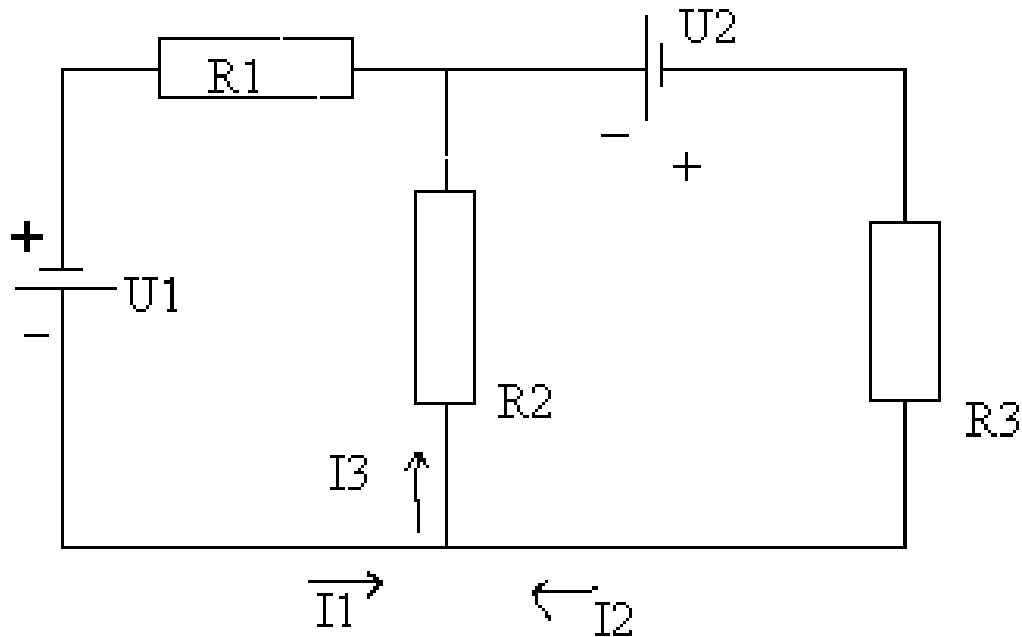
$$U = U_0(1 - e^{-\frac{t}{RC}}) \quad (8.8)$$



Nach der Zeit  $t = RC$  ist die Spannung  $U = U_0(1 - 1/e)$ .

### 8.2.3 Gleichstromnetzwerke

Ein Netzwerk ist eine netzartige Anordnung von verschiedenen Elementen.



### 8.2.4 Kirchhoffsche Gesetze

#### Knotenregel

Aus der Ladungserhaltung folgt

$$\sum_k (\pm I_k) = 0 \quad (8.9)$$

$+I_k$  für einlaufende Ströme

$-I_k$  für auslaufende Ströme

#### Schleifenregel

Aus der Eindeutigkeit des elektrischen Potentials in einem geschlossenen Stromkreis.  $\sum$  Spannungen = 0. Eine Schleife ist ein geschlossener Stromkreis.

$$\sum_k (\pm U_k) + \sum_l (\pm I_l) \cdot R_l = 0 \quad (8.10)$$

$+U_k$ : Durchlaufung von  $+$   $\rightarrow$   $-$ .

$-U_k$ : Durchlaufung von  $-$   $\rightarrow$   $+$ .

$+I_l$ : Durchlaufung gleichsinnig mit Stromrichtung.

$-I_l$ : Durchlaufung gegensinnig zur Stromrichtung.

#### Berechnungsvorgang

Leiterstücke sind Stücke zwischen Knoten. In ihnen herrscht eine einheitliche Richtung.

1. Jedes Leiterstück und jede Spannungsquelle orientieren. (bekannte Orientierungen berücksichtigen.)
2. Knotenregel für alle Knoten anwenden.

3. Schleifenregel für alle Schleifen.

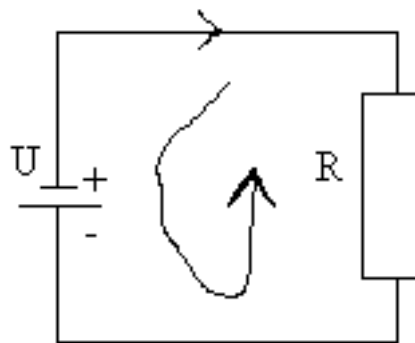
Hierbei erhält man lineare Gleichungen, die man lösen kann.

**Interpretation der Ergebnisse**

$U_k, U_l > 0$ : tatsächliche Orientierung gleich der willkürlichen Festlegung.

$U_k, U_l < 0$ : tatsächliche Orientierung ungleich der willkürlichen Festlegung.

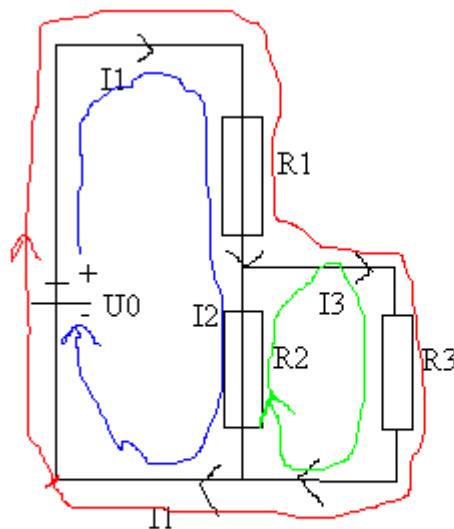
**Beispiel**



$$+U - I \cdot R = 0$$

$$U = I \cdot R$$

**Beispiel 2**





1. Knoten (\*):  $I_1 = I_2 + I_3$
2. Knoten:  $I_2 + I_3 = I_1$  (keine neue Information)
1. Schleife (1): Aussenherum: (rot)  $-U_0 + I_1 \cdot R_1 + I_3 \cdot R_3 = 0$
2. Schleife (2): Innenherum: (blau)  $-U_0 + I_1 \cdot R_1 + I_2 \cdot R_2 = 0$ .
3. Schleife (3): Widerstände: (grün)  $I_3 \cdot R_3 - I_2 \cdot R_2 = 0$ .
3. Schleife + 2.Schleife = 1.Schleife. Also sind von unseren 5 möglichen Gleichungen, 3 linear Unabhängig. Wenn ich  $U_0, R_1, R_2, R_3$  kenne, habe ich 3 Unbekannte, also ist das Gleichungssystem lösbar.

aus 3:  $I_3 = I_2 \cdot R_2 / R_3$

in \*:  $I_1 = I_2(1 + R_2/R_3) = I_2/R_3(R_3 + R_2)$

$I_2 = I_1 \cdot R_1 / (R_2 + R_3)$

in 2:  $-U_0 + I_1 \left[ R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} \right] = 0$

$$I_1 = \frac{U_0}{R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}} = \frac{U_0(R_2 + R_3)}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}$$

$$I_2 = I_1 \cdot \frac{R_3}{R_2 + R_3} = \frac{U_0 R_3}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}$$

$$I_3 = I_1 - I_2 = \frac{U_0 R_2}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}$$

Diese symmetrischen Lösungen sind für Netzwerke typisch.

Fall  $R_1 = R$   $R_2 = R_3 = 2R$

$$I_1 = U_0/2R \quad I_2 = I_3 = U_0/4R$$

$$U_{R1} = I_1 R_1 = U_0/2.$$

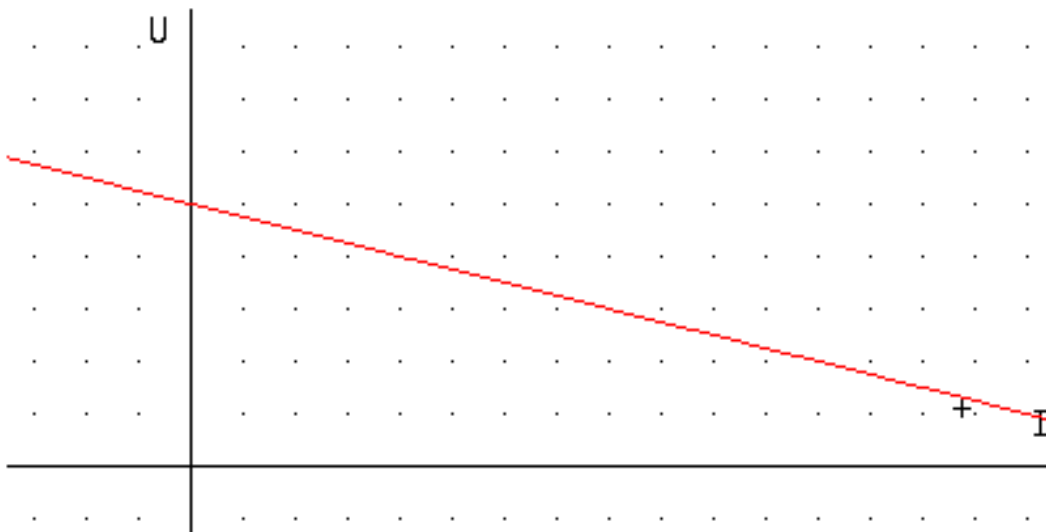
Beim Wegnehmen von  $R_3$  (gleich mit  $R_3 \rightarrow \infty$ ) steigt die Spannung an  $R_1$ . Da nur noch ein Stromkreis vorhanden ist gilt:  $I_2 = I_1$ . Also  $-U_0 + I_1(R_1 + R_2) = 0$  Also  $I_1 = U_0/(R_1 + R_2)$ . In unserem Fall:  $I_1 = U_0/3R$ .

Dies ist ein Spannungsteiler. Die Spannung wird zwischen den Widerständen geteilt.

### 8.2.5 Innenwiderstand

Wir betrachten den Innenwiderstand einer Spannungsquelle. Man sieht im Experiment, dass die Klemmenspannung einer Batterie niedriger wird, je mehr Strom fließt. Also belastete Batterien liefern eine niedrigere Spannung.

Zur Darstellung einer Batterie verwenden wir deswegen ein Ersatzschaltbild. Wir stellen die Batterie durch eine Ideale Batterie  $U_0$  und einem Innenwiderstand  $R_i$  da. Wir erhalten für die Klemmenspannung bei einem Lastwiderstand  $R_l$   $U_{kl} = I \cdot R_l = U_0 - I \cdot R_i$ .



Spannungsabfall an einer Spannungsquelle. Man wünscht sich eine Spannungsquelle mit einem möglichst kleinem Innenwiderstand. Ein Kurzschluss ist, wenn der Lastwiderstand so gering ist,

dass durch den Innenwiderstand die Spannung auf 0 abfällt. Damit dies nicht passiert gibt es Sicherungen.

### Serienschaltung von ohmschen Widerständen

Wir haben die Widerstände  $R_1, R_2, R_3$  in Serie geschaltet. Wir legen die Spannung  $U$  an. Es gibt keinen Knoten, sondern nur eine Schleife. Durch anwenden der 2. Kirchhoffregel:  $-U + I \cdot R_1 + I \cdot R_2 + I \cdot R_3 = 0$ . Daraus folgt:  $U = I(R_1 + R_2 + R_3)$ . Wenn man die Widerstände als einen auffasst:  $U = R \cdot I$ , kann man also die Widerstände zu

$$R = R_1 + R_2 + R_3 \quad (8.11)$$

zusammenfassen.

### Parallelschaltung von ohmschen Widerständen

Wir haben die Widerstände  $R_1, R_2$  parallel zu einer Spannungsquelle  $U$  geschaltet. Durch die Spannungsquelle fließt ein Strom  $I$ , durch den ersten Widerstand  $I_1$  durch den zweiten  $I_2$ .

$$1. \text{ K.-R.: } I - I_1 - I_2 = 0$$

$$2. \text{ K.-R.: } -U + R_2 \cdot I_2 = 0 \Rightarrow I_2 = U/R_2$$

$$-U + R_1 \cdot I_1 = 0 \Rightarrow I_1 = U/R_1$$

$$R_1 \cdot I_1 - R_2 \cdot I_2 = 0$$

$$I = I_1 + I_2 = U(1/R_1 + 1/R_2)$$

Wir denken uns das System als einen Gesamtwiderstand mit  $I = U \cdot 1/R$ . Hiermit

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \quad (8.12)$$

### Messung von Widerständen

- Anschliessen des Widerstandes an eine Spannungsquelle, man misst den Strom  $I$  und die Spannung  $U$ . Das Strommessgerät darf nicht im Bereich, wo die Spannung gemessen wird, sein. Den Widerstand erhält man dann durch  $R = U/I$
- **Wheatstone-Brücke** Man hat parallel geschaltet einmal ein Potentiometer ( $R_2 R_3$ ) und nochmal in Serie einen Widerstand  $R_1$  und den gesuchten  $R_x$  man nimmt jetzt zwischen den Widerständen  $R_1$  und  $R_x$  einen Strom ab, und verbindet dies mit dem Potentiometer. Wenn kein Strom mehr durch diese Verbindung fließt, ist das Verhältnis zwischen  $R_1$  und  $R_x$  gleich mit  $R_2 : R_3$ . Hierfür braucht man kein geeichtes Amperemeter.

Der Messbereich eines Amperemeters kann durch einen parallel geschalteten Widerstand erweitert werden. Der eines Voltmeters mit einem vorgeschalteten Widerstands.

## 8.3 Stromleistung

Zur Bewegung von der Ladung  $q$  im elektrischen Feld ist eine Arbeit  $W = q(\phi_1 - \phi_2) = q \cdot U$ .

$$W = q \cdot U \quad (8.13)$$

Diese Arbeit ist die Beschleunigung einer elektrischen Ladung in einem elektrischen Feld. z.B. ein Elektron, das zwischen den Kondensatorplatten beschleunigt wird. Dieses erreicht bei der Beschleunigung mit einem Volt:  $1\text{eV} = 1.6 \times 10^{-19} \text{J}$  eV ist das Elektronenvolt.

**Stromleitung**

Bei der Stromleitung in metallischen Leitern ist die kinetische Energie ist sehr klein  $\ll 1\text{eV}$ . Es tritt keine nennenswerte Beschleunigungsarbeit ein. Das bedeutet, dass die Stromleistung in thermische Energie umgewandelt wird also das **Joule'sche Gesetz**:

$$P = \frac{dW}{dt} = U \cdot \frac{dq}{dt} = U \cdot I \quad (8.14)$$

Mit dem Ohmschengesetz:  $U = R \cdot I$  erhalten wir:

$$P = U \cdot I = I^2 \cdot R = \frac{U^2}{R} \quad (8.15)$$

Daher: Wenn der Strom festgehalten wird, ist die Leistung proportional zum Widerstand.  $P \propto R$ . Wenn die Spannung festgehalten wird, ist die Leistung indirekt proportional zum Widerstand.  $P \propto 1/R$ .

**Fernleitung**

Die Gesamte umgesetzte Leistung im System ist  $P = U \cdot I$ . Welcher Anteil wird in der Leitung verbraucht:  $\Delta P = I^2 \cdot R_{\text{Leitung}}$ . Relativer Verlust:

$$\frac{\Delta P}{P} = \frac{I^2 R_{\text{Leit}}}{U \cdot I} = \frac{U I R_{\text{Leit}}}{U^2} = \frac{P \cdot R_{\text{Leit}}}{U^2} \quad (8.16)$$

Man sieht, dass man durch Erhöhung der Spannung den Leistungsverlust stark reduzieren kann. Dies führt zu Hochspannungsfernleitungen.

**8.4 Stromleitung****8.4.1 Stromleitung in Festkörpern**

Modell ist der Festkörper besteht aus Gitteratomen. Elektronen bewegen sich zwischen den Gitteratomen. Wenn man die Temperatur erhöht, wird der Widerstand erhöht, weil die Bewegung der Gitteratome die Bewegung der Elektronen behindert. Dies wird näherungsweise beschrieben durch:

$$\sigma(T) = \frac{\sigma_0}{1 + \alpha T + \beta T^2} \quad (8.17)$$

Dies ist eine empirische Formel. Meistens ist  $\beta T \ll \alpha$  und kann deswegen vernachlässigt werden. Dies sollte bei einem idealen System gegen  $\sigma_0$  gehen. Dies hängt aber stark von der Reinheit des Stoffes ab.

**Supraleitung**

Für gewisse Substanzen verschwindet der elektrische Widerstand unterhalb einer Sprungtemperatur  $T_c$ . Dies wird erklärt durch die Cooperpaare. Dies sind Zusammensetzungen von 2 Elektronen.

**Wärmeleitfähigkeit**

Gute Elektrischeleitfähigkeit impliziert gute Wärmeleitfähigkeit. Dies beschreibt das Wiedemann-Frantzgesetz.

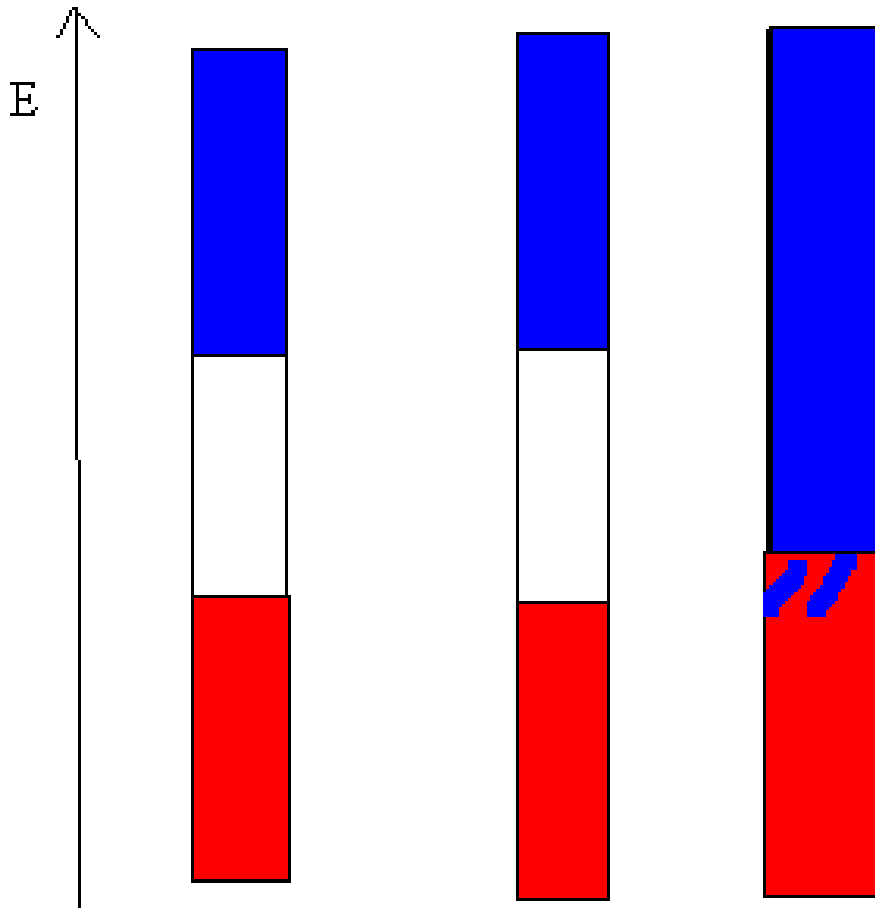
$$\frac{\lambda}{\sigma} = a \cdot T \quad (8.18)$$

Für  $a \approx 3k^2/e^2$ .

### Unterschiede der Leitfähigkeit

Es gibt zwischen den verschiedenen Stoffen sehr grosse Unterschiede der Leitfähigkeit. Dies hängt mit der Wechselwirkung zwischen den Hüllenelektronen zusammen. Diese Formen Energiebänder, diese werden gemeinsam von den äusseren Elektronen geformt. Auf diesen können sich die Elektronen frei bewegen. Dieses Modell wird als Bändermodell bezeichnet.

Für mehr Informationen siehe hier<sup>1</sup>



In Rot Valenzband, in Blau Leitfähigkeitsband. Bei Leitern ist das Valenzband nicht ganz aufgefüllt. Wenn sich die beiden überlappen hat man einen guten Leiter. Wenn sich die beiden Nahe kommen, gibt es eine endliche Wahrscheinlichkeit für das „Durchtunneln“ der Elektrons vom Valenzband ins Leitfähigkeitsband. Dies führt zu den Halbleiter.

Mit dem Bändermodell kann man die **Kontaktspannung** erklären. Dies ist, dass bei der Trennung von zwei Platten aus verschiedenen Metallen eine Spannung entsteht. Die beiden Metalle haben verschiedene Energieniveaus. Das erste ist bis zum Fermieenergieniveau  $E_{F1}$  das Zweite bis zu  $E_{F2}$ . Um Elektronen aus dem Verband zu reissen braucht man die Austrittsarbeit  $W_{A1}$  und  $W_{A2}$ . Wenn die beiden in Kontakt sind, sind sie entlang der Kontaktstelle leitend, und die beiden Metalle stellen sich auf ein gemeinsames Fermienergielevel  $E_F$  ein. Dies führt zu einer Kontaktspannung:  $U_{Kontakt} = \frac{W_{A1} + W_{A2}}{e}$ . Edlere Metalle haben grössere Austrittsarbeiten.

<sup>1</sup><http://de.wikipedia.org/wiki/Bändermodell>

Die Verbindung eines edlen Metalls mit einem unedlen, führt dazu, dass das edle negativ wird, das unedle positiv. Hier draus ergibt sich die **Kontaktspannungsreihe** (+) Rb/K/Na/Al/Ph/Fe/Cu/Ag/Au/Pt (-). Wenn man zwei Metalle an zwei Stellen verbindet und die Spannung misst, ist die Kontaktspannung Null, weil sie sich ausgleicht. Die Kontaktspannung ist aber temperaturabhängig, deswegen wird ein Strom bei einem Temperaturunterschied fließen. Wenn man also durch einen solchen Leiter Strom fließen lässt, wird eine Kontaktstelle wärmer die andere kälter. Dies kann auch sehr effizient in einem Thermoelement zur Temperaturmessung verwendet werden.

### 8.4.2 Stromleitung in Flüssigkeiten

Die Situation ist hier, dass geladene Teilchen den Ladungstransport übernehmen, und nicht die Elektronen die Ladung selber transportieren. Dies sind sogenannte **Ionenleiter**.

#### Experimentell

Wir zeigen die Leitung in einer Flüssigkeit: Wasser. Wir haben reines Wasser in einer Kuvette. In dieser befinden sich zwei Elektroden, die mit einer Batterie und einem Strommessgerät einen Stromkreis verbunden sind.

Das reine Wasser hat einen Widerstand von 1.2 MegaOhm. Wenn wir in das Wasser Zucker geben. Es tut sich nichts. Bei schon sehr geringen Mengen Salz steigt die Stromstärke an. Wir haben also die Leitfähigkeit mit ein paar Körnern Salz um mehr als das 300 Fache gesteigert, also haben wir jetzt einen Widerstand im KiloOhmbereich.

#### Erklärung

Zucker teilt sich nicht. NaCl teilt sich (Dissoziation), weil die dielektrische Konstante  $\epsilon_r$  von Wasser 80 so gross, ist dass dann die Bindungskraft zwischen den beiden Atomen nicht mehr ausreicht. Wir haben dann geladenen Natrium und Chlor Atome im Wasser. Die Dipolmoleküle des Wassers, werden sich dann um diese Atome anordnen. (Hydratisierung). Diese hydratisierten Atome haben eine kleine Beweglichkeit, aber es reicht für die Leitung aus.

Wir haben  $KNO_3$  und etwas ähnliches was eingefärbt ist, in einer wässrigen Lösung. Wenn wir dort ein elektrisches Feld anlegen, beginnen die eingefärbten Moleküle zu wandern. Die Geschwindigkeit mit der dies passiert, ist sehr langsam. Deswegen warten wir jetzt 30 Minuten. Danach sieht man, dass die Ionen um in etwa 4 Millimeter gewandert sind. Dies entspricht einem Fünfzigstel der Geschwindigkeit von Elektronen in einem Leiter.

#### Terminologie

Wir haben in die Flüssigkeit eingetauchte Elektroden. Dies sind metallische Leiter. Dort wo man den positiven Pol anlegt nennt man die **Anode**  $\oplus$  den negativen die **Kathode**  $\ominus$ .

Die Ionen, die zur Kathode gehen, nennt man die **Kationen**  $\oplus$ . Dies sind die positiven Ionen. Die negativen Ionen werden aus dem Selben Grund **Anionen**  $\ominus$ .

Eine Stromleitung im Elektrolyt bewirkt:

- Eine Ablagerung an den Elektroden.
- Eine chemische Zersetzung des Elektrolyten.

#### Bleibaum

Man hat zwei Elektroden aus Blei. Eine Spitze und eine Ringförmige aussenherum. Zwischen diesen befindet sich Bleiacetat. Beim Anlegen einer Spannung entstehen an der spitzen Elektrode

baumartige Strukturen aus Blei. Durch Erhöhung der Spannung wird die Wachstumsgeschwindigkeit erhöht. Bilder gibt es hier<sup>2</sup>. Durch umdrehen der Stromrichtung kann man den Bleibaum wieder Umbringen. Man sieht, dass sich die Struktur aussen bildet.

### Beschreibung

**Massetransport an die Elektroden.** Wir betrachten Ionen in Flüssigkeit mit der festen Masse  $\mu$  und der festen Ladung  $z \cdot e$  wobei  $z$  eine kleine ganze Zahl ist, und  $e$  die Elementarladung. Wir gehen davon aus, dass es eine Abscheidung von  $N$  Ionen gibt. Die transportierte Masse ist dann  $N \cdot \mu = m$ . Die abgegebene elektrische Ladung ist:  $N \cdot z \cdot e = Q$ . Damit erhalten wir:  $N = \frac{Q}{z \cdot e} = \frac{I \cdot t}{z \cdot e}$ . Die abgeschiedene Masse ist damit:  $m = N \cdot \mu = \frac{I \cdot t}{z \cdot e} \cdot \mu = k_F \cdot I \cdot t$ . Dies ist das erste Faradaygesetz:

$$m = k_F \cdot I \cdot t \quad (8.19)$$

Dieses Gesetz besagt, dass die Abgeschiedene Masse proportional zu der Zeit und Stromstärke ist. Für den Proportionalitätsfaktor  $k_F$  erhalten wir:  $k_F = \frac{\mu}{z \cdot e} = \frac{\mu \cdot N_A}{z \cdot e \cdot N_A} = \frac{M_m}{z \cdot F}$ .  $F$  ist die Faradaykonstante  $F = N_A \cdot e$ . Somit haben wir das zweite Faradaygesetz.

$$k_F = \frac{M_m}{z \cdot F} \quad (8.20)$$

### Leitfähigkeit

Wir wollen die Leitfähigkeit  $\sigma$  von Flüssigkeiten abschätzen. Wir haben definiert  $\vec{j} = \sigma \cdot \vec{E}$ . Wir wissen auch  $j = \rho \cdot v = n \cdot q \cdot v$ .  $n$  ist hier die **Ladungsträgerkonzentration**. Für die Driftgeschwindigkeit verwenden wir ähnliche Konzepte wie bei der Diffusion. Wir sagen  $v = u \cdot E$ . Hierbei ist  $u$  die **Ionenbeweglichkeit**. Damit erhalten wir:  $j = \underbrace{n \cdot q \cdot u}_{\sigma} \cdot E = \sigma \cdot E$ . Wir erhalten also für die Leitfähigkeit:

$$\sigma = n \cdot q \cdot u \quad (8.21)$$

Einfluss der Ladungsträgerkonzentration  $n$ :

- **Steigendes  $n$ .** Dann steigt auch das  $\sigma$ , dann steigt der Strom.  
Bei grossen Werten von  $n$ :
- **Weiterer Anstieg von  $n$ :** Kraftwirkung zwischen  $+$  u.  $-$  Ionen. Damit sinkt Ionenbeweglichkeit  $u$ . Dies bedeutet eine Abnahme der Leitfähigkeit.

### Temperatur

Wir betrachten den Einfluss der Temperatur auf die Leitfähigkeit. Was passiert bei **steigender Temperatur**?

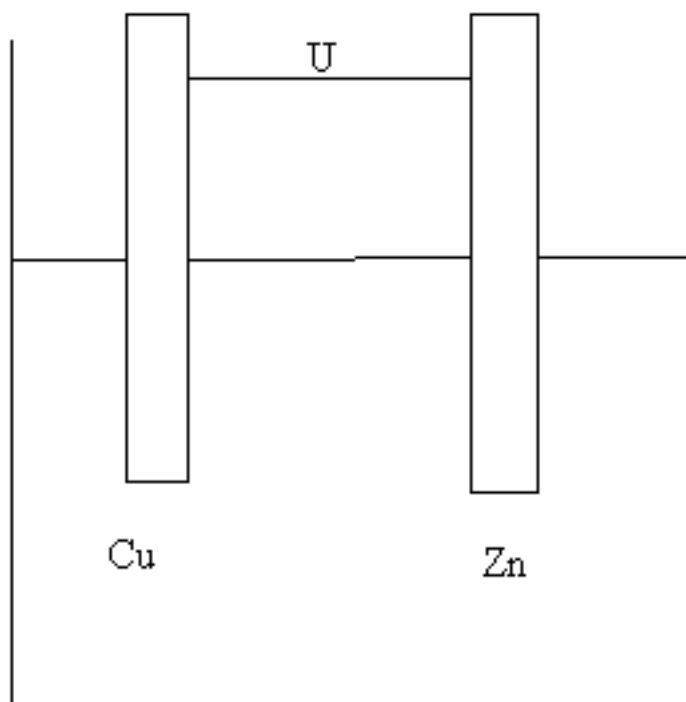
- Die Beweglichkeit  $u$  der Ionen steigt. Dies geschieht weil, die Zähigkeit einer Flüssigkeit mit steigender Temperatur abnimmt.
- steigende Ladungsträgerkonzentration  $n$ , weil auf Grund der höheren kinetischen Energie der Teilchen die Diszociation der Moleküle schneller eintritt.

Deswegen steigt die Leitfähigkeit  $\sigma$ . Dies ist ein Unterschied zu den Metallen (elektronischen Leitern).

<sup>2</sup><http://www.chf.de/eduthek/wuchu2000-1.html>

**Galvanische Element**

Wir haben zwei Elektroden in einer Flüssigkeit.



Entscheidend, ist das unterschiedliche Metalle in der Flüssigkeit sind. In den Elektroden gehen Metallionen in die Lösung. Diese gehen der Elektrode verloren, die Elektrode wird negativ die umgebende Elektrolytschicht wird positiv. Damit ergibt sich zwischen Elektrode und Elektrolyt ein Spannungsabfall  $U = \Delta\phi$ . Dies stellt sich auf ein Gleichgewicht ein. Dies passiert bei beiden Elektroden, bei verschiedenen Elektroden geschieht dies unterschiedlich. Man erhält ein  $U_1 = \Delta\phi_1$  und  $U_2 = \Delta\phi_2$ . Wir erhalten einen Spannungsabfall  $\Delta U = U_1 - U_2$  zwischen den Elektroden. Wovon hängt die Höhe die Spannung ab? Man erhält eine ähnliche Situation wie bei der Kontaktspannungsreihe. Aber es geht darum, wie die Metallionen in die Lösung gehen können, und nicht die Elektronen. Bei den edlen Metallen geht es schwer, bei den unedlen leicht. Wir erhalten bei den unedleren Metallen einen grösseren Spannungsabfall in der Lösung.

**Galvanische Spannungsreihe**

Diese ist von der Kontaktspannungsreihe unterschiedliche. Sie bezieht sich auf die Möglichkeit positive Ionen aus dem Metall zu reizen.

unedel  $\ominus$  Li / K / Na / Zn / Fe / Pb /  $H_2$  / Cu / Ag / Au  $\oplus$

**Praktische Anwendung**

Blei Akkumulator. Bleielektroden in Schwefelsäure.

### 8.4.3 Stromleitung in Gasen

Dies sind gemischte Leiter, sowohl Ionen als auch Elektronen können den Ladungstransport bewerkstelligen.

#### Plasma

Ein Plasma ist ein teilweise oder auch vollständig ionisiertes Gas. Diese Ionen sind gut beweglich. Normalerweise sind wenige Ionen in einem Gas vorhanden. Aber die Leitfähigkeit ist sehr gering.

#### Erzeugung von Ionen

Neben der Erzeugung gibt es auch die Rekombination, die die Erzeugung wieder auf hebt. Es ergibt sich so ein Fließgleichgewicht. Dieses ist die Voraussetzung für die Leitfähigkeit von Gasen.

#### Arten von Ionisation

- Volumsionisation: z.B.: durch ionisierende Strahlung
- Oberflächenionisation: z.B: durch heiße Oberflächen
- Unselbstständig: Durch äusseren Einfluss
- selbstständig: Durch schon im Gas vorhandene Ionen

#### Ionisationsmechanismen

- **Thermische Ionisation:** Auf Grund der höheren thermischen Energie, kommt es bei den heftigeren Zusammenstößen zwischen den Molekülen und so zur Ionisation. Dies assiert zum Beispiel in Flammen.
- **Photoionisation:** Durch kurzwellige Elektromagnetische Strahlung werden Elektronen aus dem Gas / Metall herausgeschossen. Dies ruft Leitung in dem Gas hervor. (Wir kommen noch näher darauf zurück). Dieser Effekt zeigt, dass Licht ein Teilchen ist.
- **Elektronenstoß-Ionisation:** Einer der Hauptmechanismen

#### Elektronenstoß-Ionisation

Es gibt hier verschiedene Arten, welche Auftritt hängt von den experimentellen Bedingungen ab:

- **Funke** („oder auf Blitz, ist ein grosse Funke“ - Paul Wagner). Hohe Ströme für kurze Dauer. Wenn man einen Kondensator mit hoher Kapazität lädt, und ihn dann kurz schliesst. Dies ist ein Funke, weil es ein kurzfristiger Vorgang ist.
- **Bogen**
  1. Glühemission aus Elektroden
  2. Stossionisation
  3. Hohe Ströme (100-1000A) bei hohen Gasdrücken (1 bar)

Dies ist stationär. Angewendet als Lichtbogen führt dies zu punktförmigen sehr hellen Lichtquellen.

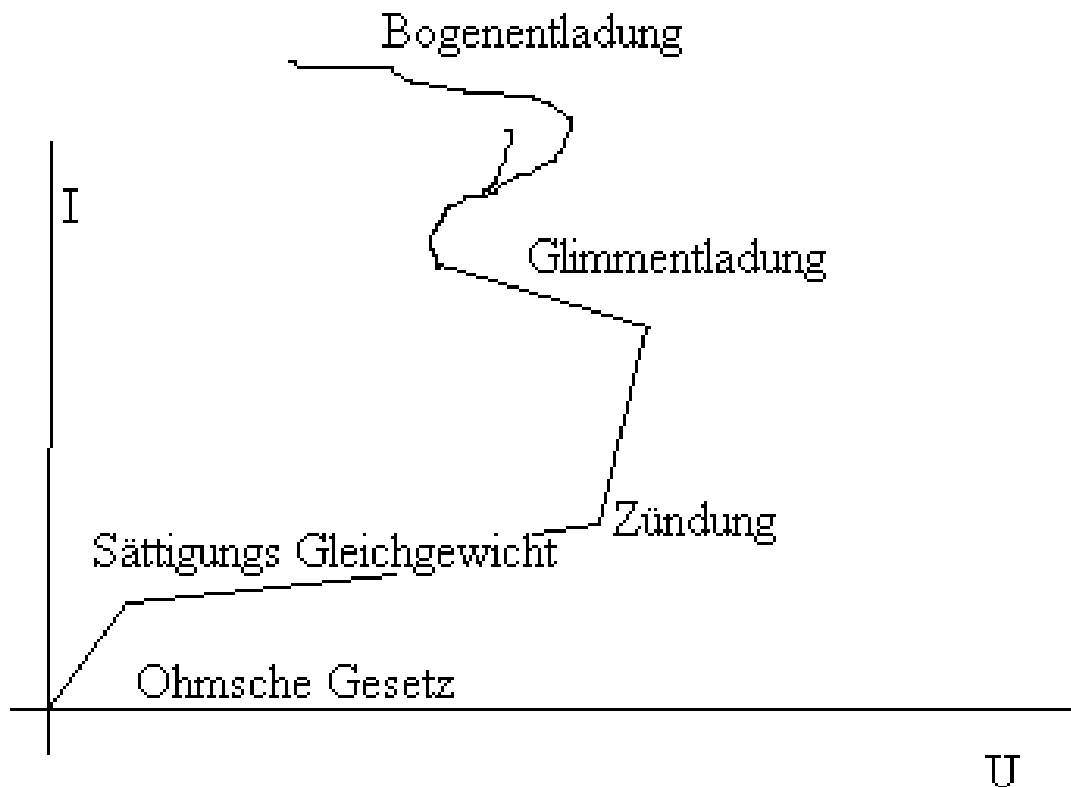


- **Glimmentladung** Dies ist wie der Bogen auf stationär, aber es hat geringe Ströme und geringe Gasdrücke (1mBar - 1hPa).

Wir haben in einer Röhre zwei Elektroden  $\oplus$  Anode und  $\ominus$  Kathode. Der Druck wird verringert. Dies führt dazu, dass die entstehenden Ionen immer beweglicher werden. Die positiven Ionen von der Anode treffen auf die Kathode auf, und schlagen da Elektronen heraus. Diese sind sehr beweglich, und erreichen sehr schnell Energien, dass sie zu einer starken Ionisation beitragen. Es gibt eine Ionenwolke gleich nach der Kathode. Vor der Kathode gibt es einen starken Potentialabfall (durch die Ionenwolke), der sogenannte **Kathodenfall**. Im Bereich der Ionenwolke entsteht das **Kathodenglimmlicht**. Dort wo kein Licht ist, nennt man den Bereich den **Faraday'schen Dunkelraum**. Danach bilden sich Schichtungen aus. Elektronen wollen weiter ionisieren. Hierzu braucht es eine gewisse Energie. Wenn es diese hat, ionisiert es, verliert wieder Energie, kann nicht ionisieren. Hierdurch ergibt sich ein auf und ab der Leuchterscheinungen. Dieser Bereich wird **Positive Säule** genannt, und ist im allgemeinen geschichtet.

Wenn man ein Loch in der Kathode hat, treten auf Grund ihrer Trägheit dort die **Kanalstrahlen** durch. Durch ein Loch in der Anode treten Elektronen durch, und erzeugen eine Fluoreszenzfleck. Dies wird für Beleuchtung (Leuchtstoffröhren) verwendet. Diese haben nicht so gross Wärmeentwicklung, wie normale Glühlampen.

#### Strom-Spannung Charakteristik



# Kapitel 9

## Magnetostatik

Eigentlich sollten diese vor den Strömen kommen, aber da wir die Zusammenhänge zwischen Magnetismus und Elektrizität schon kennen, sind wir von der historischen Abfolge abgewichen. Wir betonen so die Struktur.

### 9.1 Experimentelle Befunde

Als erstes sammeln wir wie bei der Elektrostatik ein paar Experimente, für die Vorstellung.

#### 9.1.1 Magneten

Man sieht Magneten stossen sich auf einer Seite an, und ziehen sich auf der anderen an. Wir beobachten also eine Kraftwirkung und es gibt zwei Arten von magnetischen Polen.

##### Magnetische Pole

Wir haben zwei Arten von magnetischen Polen.

- gleichnamig: Abstossend
- ungleichnamig: anziehend

##### Indikatoren

Eisenspäne, und Magnetnadeln. Mit diesen Indikatoren können wir Magnetfelder sichtbar machen, durch Kraftwirkung auf diese sichtbar machen.

##### Eisenfeilspäne

Wenn wir Eisenfeilspäne, um einen Magneten streuen ordnen sie sich im Magnetfeld an. Dies sieht man mittels der Eisenspäne als Indikator. (Siehe Abbildung).

##### Teilen von Magneten

Wenn wir Bruchstücke eines Magneten haben, haben diese noch immer die gleichen Eigenschaften wie der erste. Es gibt also **nur magnetische Dipole**. (Es gibt immer eine anziehende und abstossende Seite.) Es sind noch keine magnetischen Monopole gefunden.

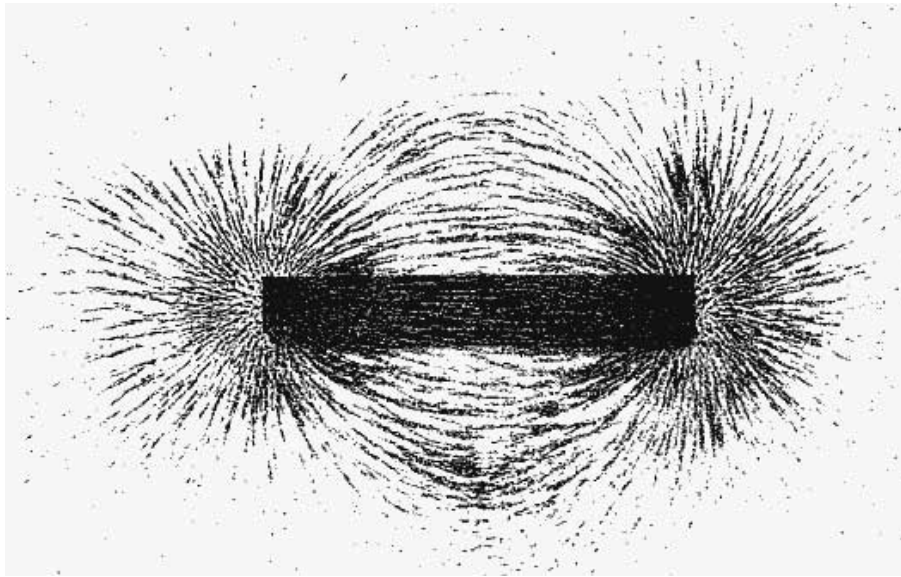


Abbildung 9.1: Eisenfeilspäne um eine Spule

### 9.1.2 Ørsted-Versuch

Dieser Versuch passierte 1819 in Dänemark. Über eine Magnetnadel ist ein Kupferdraht gespannt, über den wir 10-15 Amperer fließen lassen. Wenn der Strom fließt, stellt sich die Magnetnadel senkrecht zum Draht. Sonst richtet sie sich im Erdmagnetfeld aus.

#### Ergebnis

Ein stromdurchflossener Leiter umgibt sich mit einem Magnetfeld. Man sieht einen Ausschlag der Indikatoren.

### 9.1.3 Weitere Versuche

Man hat Drachtbügel, durch die man Strom fließen lässt. Wenn man nun Eisenfeilspäne drauf streut, sieht man wie sie sich in konzentrischen Kreisen rund um den Draht orientieren.

#### Folgerung

Im Kleinen beobachtet man das gleiche wie im Grossen.

### 9.1.4 Erklärung

Um einen stromdurchflossenen Leiter bildet sich ein magnetischer Feldwirbel aus.

### 9.1.5 Spule

Wir haben eine Spule, um jeden Leiter haben wir einen Feldwirbel. Diese überlagern sich so, dass im Inneren der Spule ein starkes magnetisches Feld herrscht, im Äusseren schwächt es sich ab.

#### Erklärung

Wieder dadurch, dass sie ein Leiter mit einem Feldwirbel umgibt.

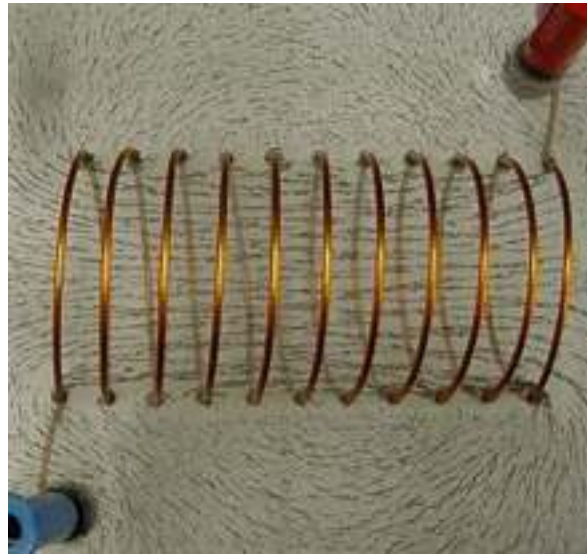


Abbildung 9.2: Feldwirbel um eine Spule

### Magneten

Das Feld um einen Magneten ist analog zu dem, um eine Spule.

### Befund

Magnetlinien schliessen sich immer. Um dies zu erklären verwendet man, dass die Moleküle in einem magnetisierten Körper die Eigenschaften von Kreisströmen haben. So kann man die Analogie erklären.

## 9.2 Beschreibung

### 9.2.1 Magnetische Flussdichte

Die Beschreibung der Wirkung magnetischen Felder passiert mittels **magnetischer Flussdichte**  $\vec{B}$ . Die genaue Bedeutung kommt später.

### Experimentelle Tatsache

Die Stärke des Magnetfeldes, um einen geraden dünnen Stromleiter geht mit dem Abstand zurück. Da wir eine Zylindergeometrie haben, ist die Stärke des Magnetfeldes mit  $1/r$  abhängig. Magnetfeld in der Umgebung von dünnem geraden Leiter, lässt sich darstellen durch:

$$|\vec{B}| = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{I}{r} \quad (9.1)$$

Das I kommt, weil man sich auch zwei Leiter denken könnte.

$\mu_0$  ist eine „furchteinflössende“ (P.W.) universelle Konstante. Die sogenannte **magnetische Feldkonstante**.

### Magnetische Feldkonstante

Die magnetische Feldkonstante  $\mu_0$  wählen wir als:

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \frac{N}{A^2} \quad (9.2)$$

Diese Definition ist engstens mit der Definition der elektrischen Stromstärke verbunden.

### Einheit von B

$$\begin{aligned}[B] &= \left[ \frac{N}{A^2} \frac{A}{m} \right] = \left[ \frac{Nm}{A^2} \frac{A}{m^2} \right] = \\ &= \left[ \frac{V \cdot A \cdot s}{A^2} \frac{A}{m^2} \right] = \left[ \underbrace{\frac{Vs}{m^2}}_{Tesla} \right]\end{aligned}$$

Wir haben die Einheit der elektrischen Verschiebungsdichte:  $[D] = \left[ \frac{As}{m^2} \right]$ . Diese beiden Grössen sind also verwandt.

### 9.2.2 Magnetische Spannung

Wir haben die elektrische Spannung definiert als  $U_e = \int_{P_1}^{P_2} \vec{E} \cdot d\vec{r}$ . Wir definieren analog die magnetische Spannung:

$$U_m = \frac{1}{\mu_0} \int_{P_1}^{P_2} \vec{B} \cdot d\vec{r} \quad (9.3)$$

Das  $\vec{B}$  ist hier keine Kraft. Der Faktor steht da nur, damit am Ende alles schön zusammen passt. Jetzt betrachten wir die Dimension:

$$[U_m] = \left[ \frac{A^2}{N} \frac{Vs}{m^2} m \right] = \left[ \frac{A^2 Vs}{V As} \right] = [A]$$

Dies ist wieder analog zu  $[U_e] = [V]$ .

### 9.2.3 Magnetische Spannung um geraden Leiter

Wir betrachten einen Kreis K, um einen Leiter. Längs diesem bilden wir die magnetische Spannung.

$$\begin{aligned}U_m &= \frac{1}{\mu_0} \oint_K \vec{B} \cdot d\vec{r} = \frac{1}{\mu_0} \lim \sum \vec{B} \cdot \Delta\vec{r} \\ &\quad \text{Da B und dr parallel} \\ &= \frac{1}{\mu_0} \lim \sum |\vec{B}| \cdot |\Delta\vec{r}| = \\ &= \frac{1}{\mu_0} \underbrace{|\vec{B}|}_{\frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{R}} \lim \sum \Delta r = \\ &= I\end{aligned}$$

Dies führt zum:

### Ampere'sches Gesetz

$$U_m = I \quad (9.4)$$

Die magnetische Spannung, um einen Strom durchflossenen Leiter, entlang einer geschlossenen Kurve ist gleich dem Strom, der durch den Leiter fliesst.

Das Gesetz  $U_m = I$  beschreibt also, die Spannung auf einem Kreis K, wobei I der Strom ist, der

durch den Kreis K hindurch tritt.

Um zur Differentialen Darstellung zu gelangen, betrachten wir eine räumlich ausgedehnte Stromdichteverteilung  $\vec{j}$ .

Für den Gesamtstrom I durch einen Leiterquerschnitt A:  $I = \iint_A \vec{j} \cdot d\vec{f}$ . Damit laut Ampere Gesetz:

$$U_m = \iint_A \vec{j} \cdot d\vec{f}.$$

Laut definition von  $U_m = \frac{1}{\mu_0} \oint_{Rd(A)} \vec{B} \cdot d\vec{r}$ .

Mit dem Stocke'schen Satz:

$$\begin{aligned} U_m &= \frac{1}{\mu_0} \oint_{Rd(A)} \vec{B} \cdot d\vec{r} \\ &= \frac{1}{\mu_0} \iint_A \text{rot} \vec{B} \cdot d\vec{f} \\ \frac{1}{\mu_0} \iint_A \text{rot} \vec{B} \cdot d\vec{f} &= \frac{1}{\mu_0} \iint_A \vec{j} \cdot d\vec{f} \\ \frac{1}{\mu_0} \text{rot} \vec{B} &= \vec{j} \end{aligned}$$

Wir erhalten damit eine neue Maxwellgleichung: (noch unvollständig, bislang nur für zeitunabhängige Felder)

$$\text{rot} \vec{B} = \mu_0 \cdot \vec{j} \quad (9.5)$$

Das bedeutet  $\mu_0 \cdot \vec{j}$  ist die Wirbelstärke von  $\vec{B}$ .

Dies gilt für die Magnetostatik, also im stationären Fall. Es wird zu dieser Gleichung noch ein weiterer Term hinzukommen.

### Magnetischer Fluss

Wir haben den elektrischen Fluss definiert als  $\Phi_e = \iint_A \vec{E} \cdot d\vec{f}$ . Wir definieren uns analog dazu den **magnetischen Fluss**  $\Phi_m$ .

$$\Phi_E = \iint_A \vec{B} \cdot d\vec{f} \quad (9.6)$$

Wir betrachten wieder die Dimension

$$[\Phi_m] = \left[ \underbrace{\frac{Vs}{m^2}}_{\text{Tesla}} \cdot m^2 \right] = \left[ \underbrace{V \cdot s}_{\text{Weber}} \right]$$

Das  $\Phi_m$  wird manchmal auch als „Polstärke“ bezeichnet.

### 3. Maxwellgleichung

Wir haben immer geschlossene Feldlinien. Das heisst, aus einem Volumen tritt immer das Feld aus und ein. Deswegen können wir davon ausgehen, dass  $\Phi_m = \oint_{Rd(v)} \vec{B} \cdot d\vec{f} = 0$ . Hiermit bekommen

wir über den Satz von Gauss  $\Phi_m = \iiint_V \text{div} v \cdot dv = 0$ . Da dies für beliebige Volumen gilt, folgt die nächste Maxwellgleichung:

$$\text{div} \vec{B} = 0 \quad (9.7)$$

Diese besagt, dass das magnetische Feld quellfrei ist, bzw. es keine magnetischen Monopole gibt.

### 9.2.4 Rückblick

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (9.8)$$

Diese besagt, die Ladungsdichte ist die Quelle des elektrischen Felds.  
Die Feldlinien gehen radial nach aussen.

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \cdot \vec{j} + \dots \quad (9.9)$$

Die Stromdichte ist gleich der Wirbelstärke des umgebenen magnetischen Felds.  
Die Feldlinien sind Kreise um den Strom.  
*Zu dieser Gleichung kommt noch was dazu. (Der Maxwellsche Verschiebungsstrom).*

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad (9.10)$$

Es gibt keine Magnetischen Punktpole, bzw. die  $\vec{B}$ -Feldlinien sind immer geschlossen.

### Skalares Potential

Das Elektrische Feld ist ein konservatives Kraftfeld, deswegen lässt es sich darstellen als:

$$\vec{E} = -\operatorname{grad} \phi \quad (9.11)$$

Das  $\phi$  bezeichnet hier das elektrische Potential. Hiermit lässt sich das Vektorfeld  $\vec{E}$  nur durch einen Skalar darstellen.

Frage geht dies für das Magnetfeld? Antwort: Nein, da  $\oint_c \vec{B} \cdot d\vec{r} \neq 0$ . Wenn wir  $\vec{B}$  als Kraftvektor auffassen würden, hätten wir ein **nicht konservatives** Kraftfeld. Deswegen, können wir  $\vec{B}$  nicht als Skalarfeld darstellen.

### Vektor Potential

Wir wollen  $\vec{B}$  nun als Rotation eines anderen Vektorfelds  $\vec{A}$  darstellen. Dann gilt:

$$\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A} \quad (9.12)$$

$\vec{A}$  ist dann das Vektorpotential. Damit gilt dann jedenfalls:  $\operatorname{div} \vec{B} = \operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{A} = 0$ .

### Eindeutigkeit

Ist  $\vec{A}$  eindeutig?  $\varphi$  ist bis auf eine Konstante eindeutig, da es vom Bezugspunkt abhängt.  
Neben  $\vec{A}$  kann auch  $\vec{A}'$  als Vektorpotential verwendbar, wenn  $\vec{A}' = \vec{A} + \operatorname{const} + \operatorname{grad} f(\vec{r})$ , weil  $\operatorname{rot} \vec{A}' = \operatorname{rot} \vec{A} + \underbrace{0 + \operatorname{rot} \operatorname{grad} f(\vec{r})}_{=0}$ . Es sind Eichtransformationen möglich. Dies führt zur Erhaltung

der elektrischen Ladung.

Mit dieser Freiheit können Eichbedingungen (Zusatzbedingungen) gestellt werden:

### Coloumb Eichung

Durch geschickte Wahl von  $\vec{A}$ , kann es der Coloumb-Eichung:

$$\operatorname{div} \vec{A} = 0 \quad (9.13)$$

erreichen. Das bedeutet, dass das magnetische Feld quellfrei ist.

### 9.2.5 Beispiel

Wir wollen uns das ganze jetzt an einem Beispiel verdeutlichen:

### Skalares Potential

Wir betrachten das skalare Potential in der Umgebung einer Punktladung.

Es gilt  $\vec{E} = -\text{grad}\phi$ .  $\vec{E} \parallel \vec{r}$  und  $|\vec{E}| \propto \frac{1}{r^2}$ .

Wir wollen Ansatz für  $\phi$ . Wir nehmen als Ansatz  $\phi = \frac{c}{r}$  (damit durch Differenziation nach Ortskoordinaten eine  $1/r^2$ -Abhängigkeit).

Wir berechnen uns nun das Potential.

$$\phi = \frac{c}{r} = \frac{c}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

Berechnung von  $\vec{E}$

$$\begin{aligned} \vec{E} &= - \underbrace{\left( \frac{\partial}{\partial x} \quad \frac{\partial}{\partial y} \quad \frac{\partial}{\partial z} \right)}_{\vec{\nabla}} c \cdot (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2} \\ &= \frac{c}{2} \cdot (x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} \\ &= c \cdot (x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{\vec{r}} \end{aligned}$$

Man sieht  $\vec{E} \parallel \vec{r}$ .

$$\begin{aligned} |\vec{E}|^2 &= c^2 \cdot (x^2 + y^2 + z^2)^{-3} \cdot (x^2 + y^2 + z^2) = c^2 \cdot (x^2 + y^2 + z^2)^{-2} \\ |\vec{E}| &= \frac{c}{(x^2 + y^2 + z^2)} = \frac{c}{|\vec{r}|^2} \end{aligned}$$

### Vektorpotential

Wir betrachten das Vektorpotential  $\vec{A}$  in der Umgebung eines geraden dünnen Stromleiters:

$$\vec{d} = (x, y, 0), \alpha = \pi/2$$

Es gilt:  $\vec{B} \perp \vec{d}$ ,  $\vec{B} \perp z\text{-Achse}$   $\vec{B} \propto \frac{1}{|\vec{d}|}$

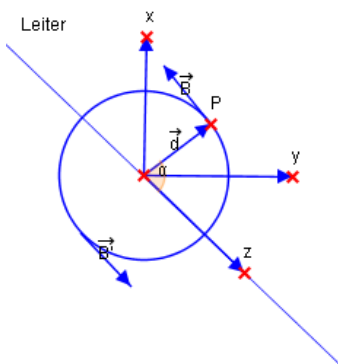
Ansatz für  $\vec{A}$ :

$$\vec{A} = c \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ln d \end{pmatrix} \quad (9.14)$$

$\vec{A} \parallel z\text{-Achse}$ , und  $|\vec{A}| = c \cdot \ln a$ .

Damit  $\vec{B} = \text{rot}\vec{A}$ :

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \\ \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial A_z}{\partial y} \\ -\frac{\partial A_z}{\partial x} \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 \end{pmatrix} c \cdot \ln(x^2 + y^2)^{1/2} = \frac{c}{2} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 \end{pmatrix} \ln |x^2 + y^2| \\ &= \frac{c}{2} \frac{1}{x^2 + y^2} \begin{pmatrix} 2y \\ -2x \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$





Damit:

$$\vec{B} = \frac{c}{x^2 + y^2} \begin{pmatrix} y \\ -x \\ 0 \end{pmatrix} \quad (9.15)$$

$$\begin{aligned} \vec{B} \cdot \vec{d} &= \frac{c}{x^2 + y^2} (xy - yx + 0) = 0 \\ \Rightarrow \vec{B} &\perp \vec{d} \\ B_z = 0 &\Rightarrow \vec{B} \perp z - \text{Achse} \\ |\vec{B}| &= \frac{c}{x^2 + y^2} \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{c}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ |\vec{d}| &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ |\vec{B}| &= \frac{c}{|\vec{d}|} \\ \operatorname{div} \vec{A} &= 0 \end{aligned}$$

### 9.2.6 Lösung der Maxwellgleichungen

#### Grundlagen

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{B} &= 0 \\ \operatorname{rot} \vec{B} &= \mu_0 \vec{j} \end{aligned}$$

Diese beiden Differentialgleichungen müssen gelöst werden, um das magnetische Feld zu berechnen. Wir wollen jetzt aus einer Stromstärke, das zugehörige magnetische Feld ermitteln. Wir nehmen hierzu einen Potentialansatz.

#### Potentialansatz

Wir nehmen für  $\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}$ . Hiermit erhalten wir für die zweite Gleichung:  $\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{A}) = \mu_0 \vec{j}$ . Dies kann man umformen zu:  $\operatorname{grad}(\operatorname{div} \vec{A}) - \Delta \vec{A} = \mu_0 \vec{j}$ . Wir setzen die Coulomb-Eichung voraus:  $\operatorname{div} \vec{A} = 0$ . Hiermit erhalten wir:

$$\Delta \vec{A} = -\mu_0 \vec{j} \quad (9.16)$$

Hiermit können wir für vorgegebene Ströme das Vektorpotential ermitteln. Dies ist analog zur Poisson Gleichung  $\Delta \phi = \rho/\epsilon_0$ .

Für stromfreien Raum erhält man:

$$\Delta \vec{A} = 0 \quad (9.17)$$

#### Spezialfall

Wir betrachten speziell einen dünnen Stromleiter (muss nicht geradlinig sein). Wir betrachten den Leiter C. Durch das Leiter-element  $d\vec{R}$  an der Stelle  $\vec{R}$  fließt der Strom I, wir wollen den magnetischen Feldvektor  $\vec{B}$  am Punkt P mit dem Ortsvektor  $\vec{r}$

berechnen.

#### Berechnung

Durch Lösen der Grundgleichungen erhalten wir das Biot-Savart-Gesetz: Dies ist ein integrales Gesetz, weil wir die ganze Leiterlänge betrachten müssen.

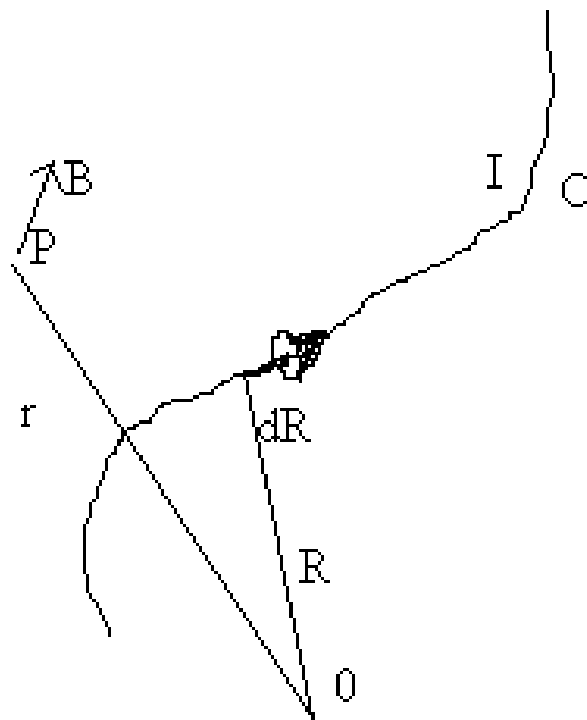


Abbildung 9.3: Dünner Stromleiter

### 9.2.7 Biot-Savart-Gesetz

Für einen dünnen Stromleiter gilt, dass die magnetische Flußdichte an dem Punkt  $\vec{r}$  gegeben ist durch folgendes Gesetz.  $I$  ist die Stromstärke durch den Leiter.  $\vec{R}$  beschreibt den Leiter (also die Koordinate jedes Punktes eines Leiters).

$$\vec{B}(\vec{r}) = -\frac{\mu_0}{4\pi} I \int_C \frac{(\vec{r} - \vec{R}) \times d\vec{R}}{|\vec{r} - \vec{R}|^3} \quad (9.18)$$

Man sieht:  $\vec{B} \propto d\vec{R} \times (\vec{r} - \vec{R})$ . Man sieht  $\vec{B}$  ist ein Axialer Vektor (bzw. ein Pseudovektor). Er kann also mit dem Winkelgeschwindigkeitsvektor verglichen werden.

Für ein einzelnes Stromelement gilt:  $|d\vec{B}| \propto \frac{1}{|\vec{r} - \vec{R}|^2}$ .

### 9.2.8 Spezielle Magnetfelder

Man kann sich mit dem Amperschengesetz helfen:  $U_m = \frac{1}{\mu_0} \oint_C \vec{V} \cdot d\vec{r} = I$ .

#### Zylindrischer Leiter

Wir betrachten einen Leiter mit einer endlichen Dicke. Im Inneren hat es eine homogene Stromdichteverteilung.  $r_0$  ist der Radius des Leiters.

**Außenraum** ( $r \geq r_0$ ) Wir betrachten die magnetische Spannung längs des Kreises  $C$  (mit Radius  $r$ , um den Leiter). Es herrscht überall der magnetische Flußdichtevektor  $\vec{B}$  tangential an den Kreis.  $U_m = \frac{1}{\mu_0} \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{r} = \frac{1}{\mu_0} 2\pi r \cdot B$ . Hierbei ist  $B = |\vec{V}|$ . Nach dem Amperschen Gesetz ist dies gleich der Stromstärke. Also  $I = \frac{1}{\mu_0} 2\pi r B$ . Wir erhalten also:

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{r} \quad (9.19)$$

**Innenraum:** ( $r \leq r_0$ ). Wir betrachten wieder die Kurve  $C$ , mit der magnetischen Spannung:  $U_m = \frac{1}{\mu_0} 2\pi r B$ . Wir dürfen nur den Strom, der durch den Kreis  $c$  fließt betrachten:  $I_r = \underbrace{\frac{I}{\pi r_0^2}}_{|\vec{j}|} \pi r^2 = I \frac{r^2}{r_0^2}$ .

Wir können nun wieder das Amperesche Gesetz anwenden:  $U_m = I_r$ . Also:  $I \cdot \frac{r^2}{r_0^2} = \frac{1}{\mu_0} 2\pi B$ . Wir erhalten nun  $B = \frac{\mu_0}{2\pi r_0^2} \cdot I \cdot r$ .

#### Dünnere gerader Leiter

Dies wollen wir jetzt mit Hilfe des Biot-Savart-Gesetz lösen. Wir legen das Koordinatensystem so, dass der Leiter in der  $z$ -Achse liegt. Wir legen den Ursprung, so dass unser Punkt  $p$  in der  $xy$ -Ebene liegt. Wir betrachten ein Stromelement  $d\vec{R}$  mit dem Ortsvektor  $\vec{R}$ , durch den Leiter fließt der Strom  $I$ .

$$|\vec{R}| = z, |d\vec{R}| = dz, |\vec{r}| = r, |\vec{r} - \vec{R}| = s.$$



$$\begin{aligned}
\vec{B} &= -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{(\vec{r} - \vec{R}) \times d\vec{R}}{|\vec{r} - \vec{R}|^3} \\
|\vec{V}| &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz \cdot s \cdot \sin(\pi/2 + \alpha)}{s^3} \\
s &= \frac{r}{\cos \alpha} \\
z &= r \cdot \tan \alpha \\
\frac{dz}{d\alpha} &= r \cdot \frac{1}{\cos^2 \alpha} \\
|\vec{B}| &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \underbrace{\frac{rd\alpha}{\cos^2 \alpha}}_{dz} \underbrace{\frac{\cos^2 \alpha}{r^2}}_{1/s^2} \cdot \underbrace{\cos \alpha}_{\sin(\pi/2 + \alpha)} \\
|\vec{B}| &= \frac{\mu_0 I}{4\pi r} \underbrace{\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \alpha d\alpha}_2 \\
|\vec{B}| &= \frac{\mu_0 I}{4\pi r} \cdot 2 \\
|\vec{B}| &= \frac{\mu_0 I}{2\pi r}
\end{aligned} \tag{9.20}$$

Der elektrische Strom ist Ursache eines magnetischen Feldwirbels.

### 9.2.9 Langgestreckte Spule

Der Durchmesser der Spule ist im Vergleich zu ihrer Länge klein. Die Randzonen können vernach-

lässigt werden.  $L$  Länge der Spule  
 $n$  Anzahl der Windungen pro Längeneinheit Der Spulendurchmesser  
 $N = n \cdot L$  Gesamtwindungszahl

«  $L$ .

Betrachten magnetische Spannung entlang der Kurve A,B,C,D.

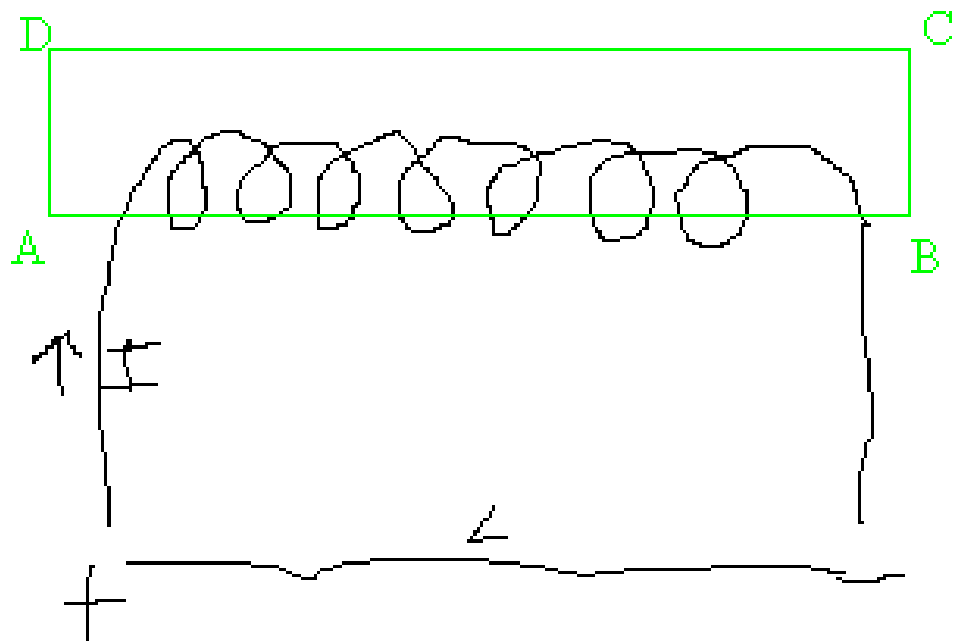
#### Berechnung

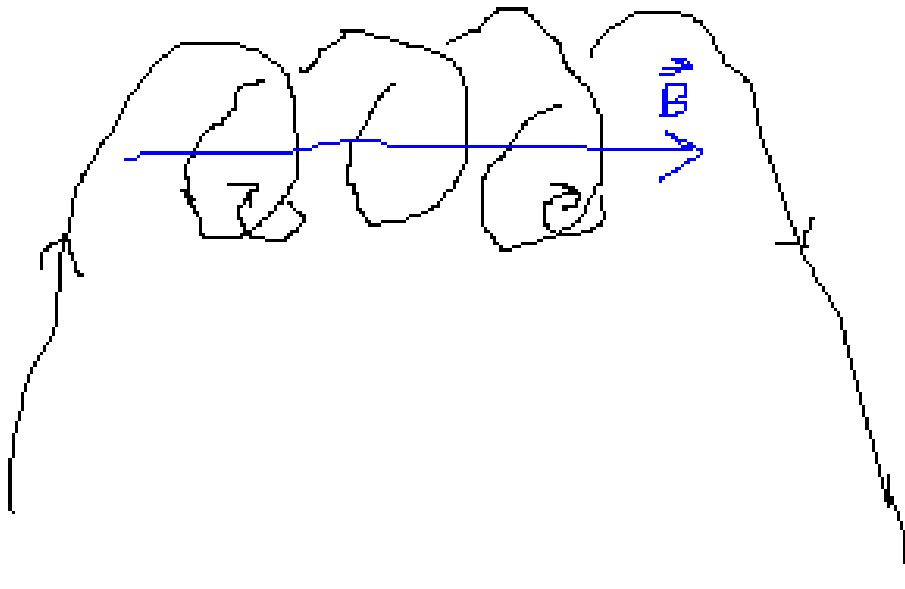
Im inneren herrscht ein weitgehend homogenes Feld. Der Aussenraum ist feldfrei.

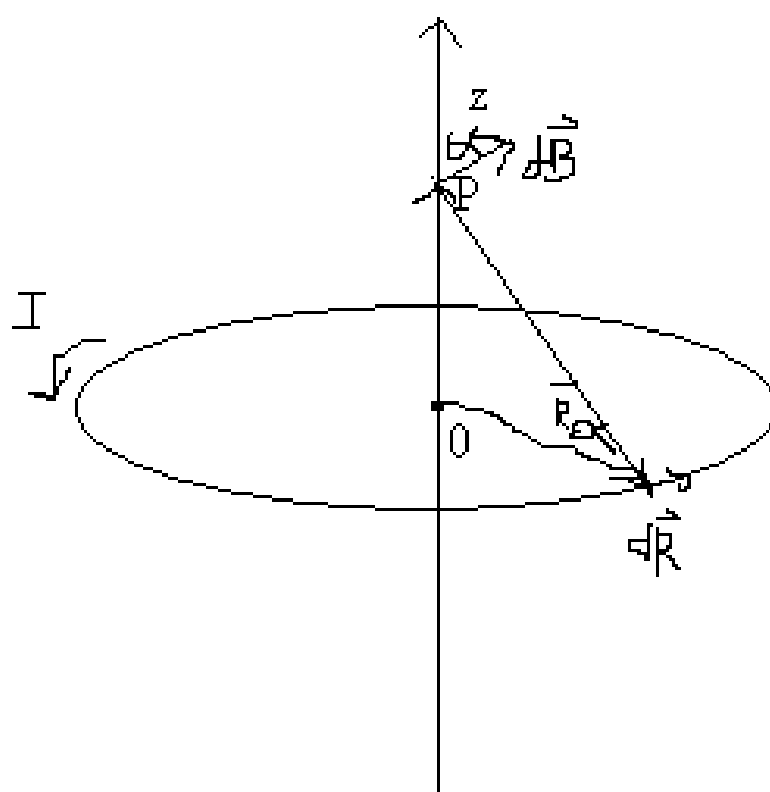
$$\begin{aligned}
U_m &= \frac{1}{\mu_0} \oint \vec{B} \cdot d\vec{r} = \frac{1}{\mu_0} \cdot B \cdot L \\
U_m &= N \cdot I \text{ (Amperesche Gesetz)} \\
\frac{1}{\mu_0} BL &= n \cdot L \cdot I \\
B &= \mu_0 \cdot n \cdot I
\end{aligned} \tag{9.21}$$

### 9.2.10 Stromschleife

Wir betrachten einen kreisförmigen dünnen Leiter eine sogenannte Stromschleife.









Wir betrachten ein Leiterelement  $d\vec{R}$  an der Stelle  $\vec{R}$ . Wir beschränken uns zur Berechnung auf Punkte auf der Achse. Diesen Punkt nennen wir P mit Ortsvektor  $\vec{r}$ . Wir haben den Verbindungsvektor  $\vec{r} - \vec{R}$ . Da es zu jedem Vektor  $d\vec{B}$  einen gegenüber liegenden gibt, der die tangential Komponente aufhebt, braucht man nur die parallel Komponente von  $d\vec{B}$  betrachten also nur  $d\vec{B}_{||}$ . Die Position von P wird auch durch einen Winkel  $\alpha$  beschrieben.

$$\begin{aligned}
 |\vec{R}| &= R \\
 |d\vec{R}| &= db \\
 |\vec{r}| &= z \\
 |\vec{r} - \vec{R}| &= s \\
 d\vec{B} &= -\frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{(\vec{r} - \vec{R}) \times d\vec{R}}{|\vec{r} - \vec{R}|^3} \\
 dB &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{s \cdot db}{s^3} \\
 dB_{||} &= dB \cdot \cos \alpha \\
 dB_{||} &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\overbrace{s \cdot \cos \alpha}^R \cdot db}{s^3} \\
 dB_{||} &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{R \cdot db}{s^3} \\
 s &= (z^2 + R^2)^{1/2} \\
 dB_{||} &= \frac{\mu_0 I R}{4\pi (z^2 + R^2)^{3/2}} db \\
 |\vec{B}| &= \frac{\mu_0 I R}{4\pi (z^2 + R^2)^{3/2}} \cdot \underbrace{2\pi R}_{\int_0^{2\pi R} db}
 \end{aligned}$$

Und wir erhalten:

$$|\vec{B}| = \frac{\mu_0 I R^2}{2(z^2 + R^2)^{3/2}} \quad (9.22)$$

Man sieht in der Schleifenmitte ist das Feld am Grössten ( $z=0$ ) nach oben und unten nimmt es ab.

Für  $B(z=0) = \frac{\mu_0 I}{2R}$  und für  $B(z \gg R) = \frac{\mu_0 I R^2}{2z^3}$ .

### 9.2.11 Magnetisches Dipolmoment

Wir betrachten nun diese Stromschleife als magnetischen Dipol. Diese umschließt eine Fläche A mit einem Flächenvektor  $\vec{A}$ . Wir haben den Strom I, der durch die Stromschleife fließt.

#### Defintion

Wir definieren das magnetische Dipolmoment.

$$\vec{p}_m = I \cdot \vec{A} \quad (9.23)$$

Durch die Gleichungen für die Stromschleife erhalten wir, mit  $A = R^2 \pi$ :

$$\vec{B}(z \gg R) \approx \frac{\mu_0 \vec{p}_m}{2\pi z^3} \quad (9.24)$$

### 9.2.12 Helmholtz-Spulenpaar

Wir haben zwei Spulen mit Radius R in Abstand R. Wir erhalten so ein homogenes Feld zwischen den beiden Spulen.

## 9.3 Ladungen im Magnetfeld

Wir wollen nun die Kräfte, die auf Ladungen im Magnetfeld wirken untersuchen. Wir wissen schon, dass die Kraft im elektrischen Feld gilt:  $\vec{F} = q \cdot \vec{E}$ .

### 9.3.1 Experimentelle Befunde

Wir wollen die Auswirkungen von Magnetfeldern auf Ladungen untersuchen.

#### Ladung im Magnetfeld

Auf eine **ruhende** Ladung in einem Magnetfeld wirkt **keine** Kraft. Wir haben aber in letzter Zeit viel über Ströme (bewegte Ladungen) gesprochen.

#### Lorentzschaukel (Affenschaukel)

Wir haben eine Schaukel bestehend aus einem Leiter, diese schaukelt in einem Hufeisenmagnet. Wenn der Strom in die eine Richtung fließt, wird die Schaukel hineingezogen, in die andere heraus. Man sieht der Ausschlag wird bei höherer Stromstärke grösser.

Man sieht: Es wirkt eine Kraft auf einen stromdurchflossenden Leiter senkrecht auf den stromdurchflossenden Leiter und senkrecht auf das Magnetfeld steht.

#### Rayleigh Horn

Wir haben ein Horn auf einem Elektromagneten, um dieses entsteht ein radiales Magnetfeld. Wenn wir durch einen Lametafaden Strom durch fließen lassen, wickelt sich dieser je nach Stromrichtung einmal in die eine das andere mal in die andere, um das Horn.

#### Barlow-Rad

Wir haben ein Rad mit einem Kontakt an der Achse und einem am „Boden“, dieses befindet sich in einem Hufeisenmagnet.

#### Stromdurchfluss Elektrolyt

Wir können einen ähnlichen Effekt auf die Ionen in einer Flüssigkeit beobachten. Da man hier sieht, dass sich die Flüssigkeit mit bewegt, wirkt eine Kraft von den Ladungen auf die Flüssigkeit. Man nennt diesen Effekt die Ionen-Reibung.

#### Parallele Leiter

Wir haben 2 parallele stromdurchflossene Leiter. Wir nehmen an, dass zwischen ihnen eine Kraft wirkt. Bei gleichsinniger Durchströmung ziehen sich die Leiter an, bei gegensinnig stossen sie sich ab.

#### Elektronenstrahl im Fadenstrahlrohr

Wenn wir einen Elektronenstrahl (aus einer Elektronenkanone (glühender Metallfaden, beschleunigt durch Spannung)) durch Helmholtzspulen fliegen lassen, bildet er ab einem genügend grossen Fachen Magnetfeld, bildet der Elektronenstrahl eine Kreisbahn. Man sieht, dass der Radius dieses Kreises proportional zur Stärke des Magnetfeldes ist. Man sieht nicht wirklich den Atomenstrahl sondern, die Fluoreszenz des Restgases im Glaszylinder (ähnlich wie bei der Gasentladung).

Wenn man den Elektronenstrahl kippt, bildet sich eine Schraubenbewegung des Strahls.

Die Kreisbahn zeigt uns, dass die Kraft immer senkrecht auf die Bewegung der Elektronen gibt und auch senkrecht auf die des Magnetfeldes. Bei der geeigneten Elektronenkanone, wirkt die Kraft

nur auf die Komponente der Geschwindigkeit senkrecht zum Magnetfeld, die Komponente in Richtung des Magnetfeldes spielt keine Rolle. Es kommt zu einer kräftefreien Bewegung in Richtung des Magnetfeldes, die sich mit der Kreisbewegung überlagert.

Kraftwirkung ist senkrecht auf den Strahl (Bewegungsgeschwindigkeit  $\vec{v}$ ), senkrecht auf die Flußdichte  $\vec{B}$ . Radius der Kreisbahn  $r \propto \frac{1}{B}$ , bzw.  $B \propto \frac{1}{r}$ . Dies passiert bei einer konstanten Bahngeschwindigkeit der Elektronen. Die Zentripetalkraft  $|\vec{F}| = \frac{mv^2}{R}$ . Hier draus folgt  $|\vec{F}| \propto |\vec{B}|$ .

Es wäre außerdem leicht zu zeigen, dass  $|\vec{F}| \propto |\vec{v}|$ .

### 9.3.2 Lorentzkraft

Wir versuchen nun dies in eine Formel zu fassen:

$$\vec{F} = q(\vec{v} \times \vec{B}) \quad (9.25)$$

Bemerkenswert ist hier die Abwesenheit von Konstanten. Dies ist so, wegen den entsprechenden Definitionen der Einheiten. Dies ist allerdings nur der Anteil im Magnetfeld. Im elektrischen Feld wirkt noch  $\vec{F} = q\vec{E}$ . Wir erhalten also als Gesamtkraft:

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (9.26)$$

Dies ist die **Lorentz-Kraft**  $\vec{F}$  auf die Ladung  $q$  mit der Geschwindigkeit  $\vec{v}$  in dem elektrischen Feld  $\vec{E}$  und dem magnetischen Feld  $\vec{B}$ .

Diese Formel kann nicht aus den Maxwellgleichungen berechnet werden. Diese dienen nur dazu sich die elektrischen bzw. magnetischen Felder zu berechnen. Deswegen ist diese Gleichung so zentral.

#### Elektronenstrahl

Wir betrachten einen Elektronenstrahl im Magnetfeld. Wir schießen Elektronen aus einer Elektronenkanone in ein Magnetfeld. Wir haben danach kein elektrisches Feld, deswegen brauchen wir nur den Anteil  $\vec{F} = q(\vec{v} \times \vec{B})$ . Da wir senkrecht auf das Magnetfeld einschießen, sind  $\vec{v}$  und  $\vec{B}$  immer senkrecht aufeinander.

Wir haben die **Beschleunigungsspannung**  $U$ . Deswegen haben wir die danach die kinetische Energie der Elektronen  $T = mv^2/2 = e \cdot U$ . Hierdraus folgert für die Geschwindigkeit der Elektronen  $v = \sqrt{\frac{2eU}{m}}$ . Unsere experimentelle Erfahrung sagt uns, dass sich die Teilchen entlang einer Kreisbahn bewegen. Also ist die Zentripetalkraft = Lorentzkraft. Dies bedeutet:  $mv^2/R = evB$ .

Wir erhalten also für den Radius  $R = \frac{mv}{eB} = \frac{m}{eb} \sqrt{\frac{2eU}{m}} = \frac{1}{B} \sqrt{\frac{2Um}{e}}$ . Diesen Radius kann man messen. Das  $\vec{B}$  kann man berechnen. Die Beschleunigungsspannung kann man auch messen. Die Elementarladung kennt man seit Milikan. Also kann man mit diesem Experiment die Masse des Elektrons messen.

$$m_e = 9.1093826 \times 10^{-31} \text{ kg} \quad (9.27)$$

Man sieht der Radius ist proportional zu  $R \propto \frac{\sqrt{U}}{B}$ .

#### Kraft auf einen geraden Leiter

Wir betrachten die Kraft, die auf einen Leiter in einem äußeren Magnetfeld wirkt.

- A    Leiterquerschnitts-Fläche
- q    Ladung eines Ladungsträgers
- n    Anzahl der Ladungsträger pro Volumseinheit
- $v_D$     Driftgeschwindigkeit der Ladungsträger

Wir berechnen als erstes die Kraft  $d\vec{F}$  auf ein kleines Leiterstück  $dL$ :

$$d\vec{F} = q(\vec{v}_D \times \vec{B}) \cdot n \cdot \underbrace{A \cdot dL}_{dV}$$

Die Driftgeschwindigkeit  $v_D$  geht in Richtung des Leiters, diese ist parallel zum Leiterstück. Also gilt:  $\vec{v}_D \cdot d\vec{L} = v_D \cdot d\vec{L}$ . Somit erhalten wir:

$$d\vec{F} = \underbrace{n \cdot q \cdot v_D \cdot A}_{\substack{\rho \\ \vec{j} \\ I}} \cdot (d\vec{L} \times \vec{B})$$

$$d\vec{F} = I(d\vec{L} \times \vec{B}) \quad (9.28)$$

Mit dieser Formel können wir die magnetische Flußdichte endlich messen.  $d\vec{L}$  zeigt in Richtung der positiven Stromrichtung.

## 2 parallele Leiter

Wir betrachten die Kraft zwischen 2 parallelen Leitern:

$d$  Normalabstand der Leiter

$I_1, I_2$  Ströme in den Leitern 1, 2 Wir betrachten die Kraft auf den Leiter 2 verursacht durch

$l_2$  Länge des Leiters 2

das Magnetfeld vom Leiter 1. Hierzu berechnen wir uns das Magnetfeld vom Leiter 1 am Ort vom Leiter 2:

$$B_1 = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1}{d}$$

Wir berechnen nun die Kraft  $\vec{F}_2$  dieses Feldes auf den Leiter 2.

$$F_2 = I_2 \cdot l_2 \cdot B_1$$

$$F_2 = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1 \cdot I_2 \cdot l_2}{d} \quad (9.29)$$

Dies ist das **Ampère'sches Kraftgesetz**.

### Definition der Stromstärke Einheit

Betrachten 2 gerade, dünne, parallele Stromleiter. Abstand: 1m, Stromstärke: 1 A. Berechnen Kraft auf Leiter 2 pro 1 m.

$$F_2 = \frac{\mu_0}{2\pi} (1A^2) \quad (9.30)$$

Wir definieren nun die **magnetische Feldkonstante** als:

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \frac{N}{A^2} \quad (9.31)$$

Also ist  $F_2 = 2 \times 10^{-7} N$ . Hierüber definieren wir nun das Ampère.

# Kapitel 10

## Zeitabhängige Felder

Mit unseren bisherigen Kenntnissen können wir nur statische bzw. stationäre Zustände beschreiben. Jetzt gehen wir über zu Dynamik. Wir beginnen mit „schwach“ zeitabhängigen Felder. Unsere Felder breiten sich im Raum aus, und dies nicht unendlich schnell. Dies bedeutet die Felder ändern sich, aber nicht unendlich schnell. Zuerst betrachten wir nur die Änderung von Feldern, die so langsam ist, dass wir die Ausbreitungsgeschwindigkeit noch als unendlich schnell annehmen können. Wir müssen also die Ausbreitung nicht berücksichtigen. Das Feld ist überall gleich.

### 10.1 Zeitabhängige Magnetfelder

#### 10.1.1 Experimente

##### Stabmagnet in Spule einschieben

Als erstes Wollen wir einen Magneten durch eine Spule bewegen. Ist der Magnet weit weg von der Spule ist das Feld schwach. Ist der Magnet nah, ist das Feld stark.

Auf einem Oszilliskop, das die Spannung an der Spule anzeigt, sieht man, dass wenn der Magnet durch die Spule fällt eine Spannung  $U_{ind}$  induziert. Dieser Ausschlag hat eine positive Spitze bis zur Hälfte und danach eine negative. Wenn man den Magneten andersherum hineinfallen lässt drehen sich die Spitzen um. Also die Umkehrung der Polarität des Stabmagneten führt zu einer Umkehrung der Polarität von  $U_{ind}$ . Wenn man die Windungszahl der Spule halbiert, halbiert sich auch der Spannungsausschlag (Impulshöhe). Die Impulsbreite bleibt aber gleich. Also  $U_{ind} \propto$  Anzahl der Spulenwindungen. Wenn man die Fallstrecke um einen Faktor 4 reduziert, halbiert sich die Geschwindigkeit des Magneten. Jetzt halbiert sich die Impulshöhe, und die Impulsbreite verdoppelt sich. Also gilt auch  $U_{ind} \propto$  Geschwindigkeit des Magneten, und die Fläche unter dem Spannungs-Impuls ( $\int_{t_a}^{t_e} U_{ind} dt = const.$  also unabhängig von der Geschwindigkeit) ist gleichgeblieben.

Man kann auch Annehmen, dass die Induktionsspannung  $U_{ind} \propto$  Fläche der Spulenwindungen (Leiterschleifen) ist.

##### Flexible Leiterschleife

Man kann die Abhängigkeit der Induktionsspannung von der Leiterfläche mit einer flexiblen Leiter demonstrieren. Man sieht, dass eine Änderung der Schleifenfläche zu einer Änderung von  $U_{ind}$  führt. Man sieht auch, dass die Änderung der Induktionsspannung von der Änderungsgeschwindigkeit der Schleifenfläche unabhängig ist. Also  $U_{ind} \propto$  Geschwindigkeit des Flachziehens.

### Ringe

Wir haben drei Ringe, die aufgehängt sind, zwei sind geschlossen einer offen. Wenn man nun einen Magneten durch diese Ringe durchschießt, beginnen die geschlossenen Ringe zu schwingen (in Richtung des Fluges des Magneten). Dies passiert weil die geschlossenen Magneten, Leiterkreise sind. Dies bedeutet, der Ring hat versucht den Flug des Magneten zu behindern. Dies bedeutet, dass die induzierte Spannung zu einer Behinderung des induzierenden Vorgangs führt. Dies ist die **Lenz'sche Regel**. Diese folgt aus der Energieerhaltung.

#### 10.1.2 Folgerung

Da wir eine Abhängigkeit von der Flächenänderung und der Änderung des Magnetfeldes haben, ist es sinnvoll von einer Abhängigkeit des Magnetischen Flusses zu sprechen. Wir hatten schon:

$$\Phi_m = \iint_A \vec{B} d\vec{f} \quad (10.1)$$

Als Fläche A betrachten wir hier die Fläche, die von einem Leiterkreis eingeschlossen wird. Damit erhalten wir für die induzierte Spannung:

#### Faraday Induktionsgesetz

$$U_{ind} = - \frac{d\Phi_m}{dt} \quad (10.2)$$

Das Minus folgt aus der Lenz'schen Regel.

Wir wollen nun überprüfen, ob diese Gleichung mit unserer zeitunabhängig der Fläche übereinstimmt.

$$\int_{t_a}^{t_e} U_{ind} dt = - \int_{t_a}^{t_e} \frac{d\Phi_m}{dt} dt = -(\Phi_m^e - \Phi_m^a) = \Phi_m^a - \Phi_m^e$$

#### 10.1.3 Anwendungen

##### Waltenhofen-Pendel

Wir haben ein Pendel aus einer Aluminiumplatte. Wenn wir diese durch ein Magnetfeld pendeln lassen, wird sie da sehr schnell abgebremst. Durch das veränderliche Magnetfeld, entstehen in der Aluplatte Ströme. Diese wirken dem Magnetfeld entgegen, was zur Abbremsung der Bewegung führt. Wann kann dies Demonstrieren, in dem man eine kammförmige Aluplatte, schwingegen lässt. Diese wird durch das Magnetfeld nicht abgebremst. Man kan demonstrieren, dass es sich um Kreiströme handelt, indem man einen Ring schwingen lässt. Dieser wird abgebremst.

In diesen Aluminiumkörpern treten **Wirbelströme** auf. Also haben wir eine Wirbelstrompendel. Die vernichtete Energie wird in Wärme umgesetzt. Da in den Platten Ströme auftreten, und diese auf Grund des Ohmschen Widerstands der Platten in Wärme umgewandelt wird.

##### Thomson-Schleuder

Man hat einen Elektromagneten, mit Hilfe diesen kann man einen Aluminiumring beschleunigen. Man kann hiermit 8000m/s erreichen.

#### 10.1.4 Induktionsgesetz

Wir kennen nun die Lorentzkraft  $\vec{F} = q(\vec{E} - \vec{v} \times \vec{B})$  und das Induktionsgesetz  $U_{ind} = -\frac{d\Phi_m}{dt}$ . Wir wollen uns nun den Zusammenhang zwischen diesen Gesetzen untersuchen.

### Rechteckige Stromschleife

Wir haben eine rechteckige Stromschleife mit konstanter Länge  $l$  und veränderlicher Breite  $b$ . Diese befindet sich in einem homogenen senkrecht auf die Stromschleife stehende magnetfeld  $\vec{B}$ . Die eine Längsseite der Schleife ist fix. Die andere  $\overline{P_1P_2}$  bewegt sich mit einer Geschwindigkeit  $\vec{v}$  auf die andere zu.

Wegen der Lorentzkraft wird es eine Kraft  $\vec{F}$  auf die Elektronen im Leiter  $\overline{P_1P_2}$  führen. Da sich der Leiter  $\overline{P_1P_2}$  sich auf Grund seiner Bewegung in einem veränderlichen Magnetfeld befindet, wird es eine Spannung und so einem Stromfluss kommen.

Da alles orthogonal aufeinander liegt, brauchen wir uns nur die Beträge anzuschauen. Für die Breite des Rechtecks gilt:  $b = b_0 - v \cdot t$ . **Lorentzkraft:**  $F = q \cdot v \cdot B$ . Diese Kraftwirkung entspricht einem elektrischen Feld längs des Leiters zwischen  $P_1, P_2$ :  $F = q \cdot E = q \cdot \frac{U_{ind}}{l}$ . Wenn wir diese beiden Ausdrücke gleichsetzen erhalten wir:  $q \cdot v \cdot B = q \cdot \frac{U_{ind}}{l} \Rightarrow U_{ind} = l \cdot v \cdot B$ .

**Induktionsgesetz:** Wir wollen uns als erstes den Magnetischenfluss durch die Leiterschleife berechnen:  $\Phi_m = \underbrace{l \cdot b}_A \cdot B = l \cdot (b_0 - v \cdot t) \cdot B$ . Durch einsetzen in das Induktionsgesetz  $U_{ind} = -\frac{d\Phi_m}{dt} =$

$l \cdot v \cdot B$ . Wir haben nun zwei mal als Ergebnis  $\boxed{U_{ind} = l \cdot v \cdot B}$  berechnet.

Hieraus ergibt sich, dass die Lorentzkraft und das Induktionsgesetz konsistent sind. Dies bedeutet nicht, dass die beiden Gesetze das Gleiche aussagen.

Für das Induktionsgesetz braucht man immer einen geschlossenen Leiter (Leiterschleife).

### Umformung

Wir wollen das makroskopische Induktionsgesetz nun in ein differentielles Gesetz umformen. Wir haben eine Leiterschleife mit Fläche  $A$ . Durch diese tritt ein Magnetfeld  $\vec{B}$ . Dieses ändert sich, dann kommt es zu einer induzierten Spannung in der Leiterschleife. Diese Spannung war definiert als  $U = \int_C \vec{E} \cdot d\vec{r}$ . Hier haben wir es mit einer geschlossenen Kurve zu tun, trotzdem ist die Spannung

nicht Null. Deswegen gilt für die induzierte Spannung:  $U_{ind} = \oint_{C=Rd(A)} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \iint_A \text{rot} \vec{E} \cdot d\vec{f}$ . Diese

Umformung basiert auf den Stokeschen Satz. Daher ist  $\Phi_m = \iint_A \vec{B} \cdot d\vec{f} \Rightarrow \frac{d\Phi_m}{dt} = \frac{d}{dt} \iint_A \vec{B} \cdot d\vec{f} =$

$\iint_A \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{f}$ . Laut Induktionsgesetz gilt:  $\iint_A \text{rot} \vec{E} \cdot d\vec{f} = - \iint_A \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{f}$ . Wir erhalten hiermit die letzte Maxwellgleichung:

$$\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (10.3)$$

Also die zeitliche Veränderung des Magnetfeldes bewirkt einen elektrischen Feldwirbel.

### Vergleich

Ladungen, Elektrostatik:

- keine geschlossenen E-Linien
- konservatives Feld
- $\text{rot} \vec{E} = 0$
- skalarares Potential:  $\vec{E} = -\text{grad} \phi$

Elektrisches Feld durch veränderliches Magnetfeld:

- geschlossene Feldlinien
- nicht-konservatives Feld
- $\text{rot} \vec{E} \neq 0$
- Feldanteil nicht darstellbar als  $-\text{grad} \phi$

### 10.1.5 Induktivität von Leiteranordnungen

Wir haben zwei Spulen, die eine nennen wir Feldspule an diese legen wir eine Stromquelle an, somit fließt ein Strom  $I^{(1)}$ . Dies führt zu einem Magnetfeld, das auf die andere Spule übergreift. Diese nennen wir Induktionsspule. Durch diese tritt dann ein magnetischer Fluss  $\Phi_m^{(2)}$ . Wenn sich dieses ändert, entsteht an der Induktionsspule eine Induktionsspannung  $U_{ind}^{(2)}$ . Man kann dies jetzt leicht berechnen:  $\Phi_m^{(2)} \propto I^{(1)}$ . Dies hängt von vielen Faktoren ab, diese können durch die Gegeninduktivität  $L_{12}$  ausgedrückt werden also:

$$\Phi_m^{(2)} = L_{12} I^{(1)} \quad (10.4)$$

Aus Symmetrie gründen gilt:  $L_{12} = L_{21}$ .  
Wegen dem Induktionsgesetz ergibt sich:

$$U_{ind}^{(2)} = -\frac{d\Phi_m^{(2)}}{dt} = -L_{12} \cdot \frac{dI^{(1)}}{dt} \quad (10.5)$$

#### Spezialfall

Wir haben zwei ineinander gewickelte Spulen. Wir gehen also davon aus, dass beide Spulen die gleich Querschnittsfläche  $A$  haben. Wir haben die Windungszahlen pro Länge:  $n^{(1)}, n^{(2)}$  und  $l$  die Spulenlänge. Wir erhalten für die Magnetische Flussdichte:  $|\vec{B}|^{(1)} = \mu_0 \cdot n^{(1)} \cdot I^{(1)}$ . Fluss durch 1 Windung von Spule (2):  $\mu_0 \cdot n^{(1)} \cdot I^{(1)} \cdot A$ . Fluss durch alle Windungen von Spule (2):  $\Phi_m^{(2)} = \mu_0 \cdot n^{(1)} \cdot I^{(1)} \cdot A \cdot n^{(2)} \cdot l \Rightarrow$

$$L_{12} = \mu_0 \cdot n^{(1)} \cdot n^{(2)} \cdot A \cdot l \quad (10.6)$$

Hier tritt explizit das Volumen im Inneren der Spule  $V = Al$  auf.

#### Selbstinduktion

Wir betrachten nur 1 Leiteranordnung. Wir können analoge Verhältnisse annehmen. Die Spule wird also auf sich rückwirken. Wir haben deswegen eine Selbstinduktivität. Mit dem magnetischen Fluss:  $\Phi_m = LI$  (Elektrisches Pendant ( $Q = CU$ )). Wir erhalten für die induzierte Spannung:  $U_{ind} = -\frac{d\Phi_m}{dt} = -L \cdot \frac{dI}{dt}$ .

#### Spezialfall

1 Spule mit  $n$  Windungen pro Länge, Spulenlänge  $l$  und dem Querschnitt  $A$ . Wir erhalten für die Induktivität:

$$L = \mu_0 \cdot n^2 \cdot A \cdot l \quad (10.7)$$

#### Schaltvorgänge

Wir haben eine Spannungsquelle und legen an diese eine Spule mit Ohmschen Widerstand  $R_L$  und Induktivität  $L$  an. Wenn man den Strom (Gleichstrom) einschaltet, ändert sich der Stromfluss durch die Spule. Es kommt also zu einer Induktionsspannung und diese verzögert wegen der Lenzschenregel den Stromfluss. Der Strom beginnt also erst langsamer zu fließen. Energetisch kann man sich überlegen, dass dies daran liegt, dass Energie nötig ist um das Magnetfeld aufzubauen. Um dies zu zeigen benutzt man Lampen. Wenn man den Strom einschaltet, gehen 1 und 3 sofort an, und Lampe 2 braucht lange. Weil sich eine starke Gegenspannung in der Spule aufbaut, und wenig Strom durch die Spule fließt. Wenn man ausschaltet bricht das Feld zusammen. Die Spule will sich gegen das Ausschalten „wehren“. Dies führt zu einer Spannung, die dem Strom aufrechterhalten will. Deswegen kommt es zu einem Blitz in Lampe 3.



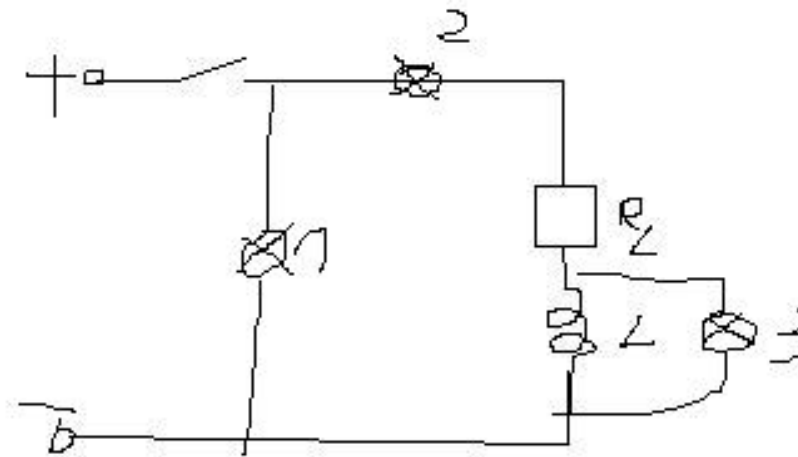


Abbildung 10.1: Schaltung einer Spule

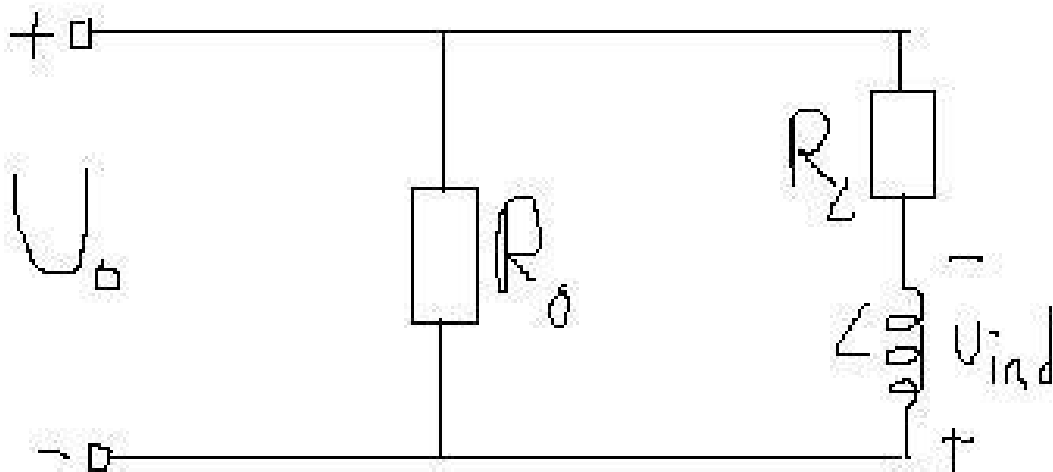


Abbildung 10.2: Ausschaltvorgang

**Ausschaltvorgang**

Wir haben einen Stromfluss. An der Spule fällt die Spannung wegen dem Ohmschengesetz  $I \cdot R_L$ , und es herrscht ein magnetisches Feld. Wenn wir den Strom abschalten, will die Spule das Feld aufrecht erhalten. Es wird dann ein Strom in entgegengesetzter Richtung durch den Widerstand  $R_0$  fließen.

**Berechnung:** Wir haben für die Induktionsspannung  $U_{ind} = -L \cdot \frac{dI}{dt}$ . Und aus dem 2. Kirchhoffschen Gesetz folgt (mit der Induktionsspannung als Spannungsquelle):  $-U_{ind} + IR_0 + I \cdot R_l = 0$ . Wenn wir die induzierte Spannung einsetzen:

$$\begin{aligned} \underbrace{I(R_0 + R_L)}_R + L \cdot \frac{dI}{dt} &= 0 \\ L \cdot \frac{dI}{dt} &= -I \cdot R \\ \frac{dI}{I} &= -\frac{R}{L} dt \\ \ln I &= -\frac{t}{L/R} + const \\ \text{Anfangsbedingung: } I(t=0) &= I_0 \\ \ln I_0 &= const \\ \ln I &= \ln I_0 - \frac{t}{L/R} \\ \ln \frac{I}{I_0} &= -\frac{t}{L/R} \\ \frac{I}{I_0} &= e^{-\frac{t}{L/R}} \end{aligned}$$

Und hiermit:

$$I = I_0 \cdot e^{-\frac{t}{L/R}} \quad (10.8)$$

Für den Kondensator galt  $I = I_0 \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$ . Hierbei kommt es bei der Spule zu einem  $I_0$  der Höhe ist als der Strom vor dem Ausschalten ist, weil das Magnetfeld rasch zusammenbricht.

**Energiegehalt der Spule**

Wir betrachten einen Ausschaltvorgang. Wir gehen davon aus, dass während des Abbaus des Feldes durch die Spule Strom fließt und es durch ihre Erwärmung zu einem Energieverbrauch kommt.

Es gilt für den Energieverbrauch:  $W_m = \int_0^\infty I \cdot u dt = \int_0^\infty I^2 \cdot R dt = R \cdot \int_0^\infty I_0^2 e^{-\frac{2t}{L/R}} dt$  Substitution

$u = -\frac{2t}{L/R}$  mit  $\frac{du}{dt} = -\frac{2R}{L}$  oder  $dt = -\frac{L}{2R} du$  Hiermit für das Integral:  $W_m = -I_0^2 \cdot R \int_0^\infty e^u \cdot$

$$\frac{L}{2R} du = -I_0^2 \cdot \frac{L}{2} \underbrace{\int_0^\infty e^u du}_{-1} \text{ also:}$$

$$W_m = \frac{1}{2} L \cdot I_0^2 \quad (10.9)$$

Beim Kondensator hatten wir  $W_e = 1/2 C U^2$ . Bei der zylindrischen Spule gilt:  $L = \mu_0 n^2 \cdot A \cdot l$  und  $B = \mu_0 n I_0$ , wodraus folgt:  $I_0 = \frac{B}{\mu_0 n}$  Durch Einsetzen erhalten wir:  $W_m = \frac{1}{2} \mu_0 n^2 A l \cdot \frac{B^2}{\mu_0^2 n^2}$ . Und hiermit:

$$W_m = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} \cdot A \cdot l \quad (10.10)$$

Dies ist wiederherum vom Spulenvolumen  $A \cdot l$  abhängig. Wir erhalten deswegen für die Energiedichte:

$$w_m = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} \quad (10.11)$$

Beim Kondensator hatten wir:  $w_e = 1/2\epsilon_0 E^2$ .

## 10.2 Zeitabhängige Elektrische Felder

Hierzu gibt es nur sehr schwer durchzuführende Laborexperimente.

### 10.2.1 Rückblick

#### Ampère'sche Gesetz

Wir haben eine Fläche  $A$ , durch diese geht ein Stromleiter durch den der Strom  $I$  fließt dann gilt:

$$\underbrace{\frac{1}{\mu_0} \oint_{\text{Rd}(A)} \vec{B} \cdot d\vec{r}}_{\text{magnetische Spannung}} = I \quad (10.12)$$

Mit Hilfe des Stokeschen Satz erhält man hieraus:  $\frac{1}{\mu_0} \iint_A \text{rot} \vec{B} \cdot d\vec{f} = \iint_A \vec{j} \cdot d\vec{f}$  Hiermit erhält man die Maxwell-Gleichung:

$$\text{rot} \vec{B} = \mu_0 \cdot \vec{j} \quad (10.13)$$

#### Konsistenz?

Wir überlegen uns ob dies Konsistent ist? Wir haben uns schon überlegt, dass die Ladung eine Erhaltungsgrösse ist. Wegen dieser Ladungserhaltung gilt:

$$\text{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (10.14)$$

Wenn wir nun die Divergenz unserer Maxwellgleichung bilden:  $\underbrace{\text{div}(\text{rot} \vec{B})}_{=0} = \mu_0 \cdot \text{div} \vec{j} \Rightarrow \text{div} \vec{j} = 0$ .

Dies widerspricht unserer Ladungserhaltung. Deswegen ist unsere Maxwellgleichung nur gültig für  $\partial \rho / \partial t = 0$ .

### 10.2.2 Gedankenexperiment

Wir betrachten einen Stromkreis mit einem Plattenkondensator. Wir haben einen Kondensator, der ist an eine Wechselspannung angeschlossen. Es wird ein Strom fließen, obwohl zwischen den Kondensatorplatten keiner fließt. Dieser bewirkt, dass die eine Platte negativ lädt und die andere positiv. Es handelt sich also um einen Aufladevorgang des Kondensators. Dieser Leiter umgibt sich mit einem Magnetfeld. Auf der Seite des Kondensators haben wir den Kreis  $K_1$  mit Fläche  $A_1$  und Radius  $r$ . Wir haben einen Kondensator mit Fläche  $A_{\text{cond}}$  im Abstand  $d$ .

Dieses Experiment funktioniert theoretisch mit Gleich- und Wechselstrom. Praktisch kann man es aber nur mit Wechselstrom zeigen.

Wir können nun zwischen den Platten einen Kreis  $K_2$  mit Fläche  $A_2$  und Radius  $r$  betrachten. Wird hier auf ein Magnetfeld sein? Dort fließt kein Strom, deswegen sollte laut Ampère'schen kein Magnetfeld sein. Dies ist komisch, weil dann das Magnetfeld aufhören würde. Experimentell

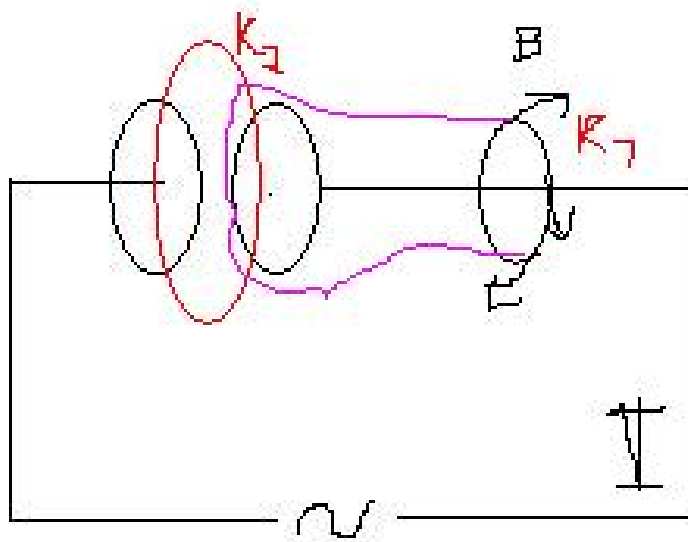


Abbildung 10.3: Gedankenexperiment

könnte man feststellen, dass das Magnetfeld zwischen den Kondensatorplatten nicht aufhört. Es gilt:

$$\begin{aligned} \oint_{Rd(A_1)} \vec{B} \cdot d\vec{r} &= \mu_0 \cdot I \\ 2\pi r \cdot B &= \mu_0 I \\ B &= \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \text{ Dieses Gesetz kennen wir schon} \\ \oint_{Rd(A_2)} \vec{B} \cdot d\vec{r} &= 0 \\ 2\pi r B &= 0 \\ B &= 0 \text{ Widerspruch zum Experiment} \end{aligned}$$

Wir können bei dem Ampère'sche Gesetz nicht nur eine Ebene betrachten, sondern jede geschlossene Kurve. Wir betrachten deswegen eine Fläche die den Rand vom Kreis  $K_1$  hat, aber um eine Kondensatorplatte herumgeht. Wir nennen diese Fläche  $\overline{A_1}$ . Wir können wieder das Ampère'sche Gesetz anwenden:

$$\begin{aligned} \oint_{Rd(\overline{A_1})} \vec{B} \cdot d\vec{r} &= 0 \\ 2\pi r \vec{B} &= 0 \\ B &= 0 \text{ Widerspruch} \end{aligned}$$

Wir können diese Widersprüche nun durch hinzufügen des Maxwell'schen Verschiebungsstroms beseitigen.

### Maxwell'schen Verschiebungsstrom

Wir versuchen nun den Änderungen zwischen den Platten etwas stromähnliches zuzuordnen. Zwischen diesen beiden Platten baut sich ein elektrisches Feld auf. Wir wissen  $\frac{dQ}{dt} = I$ . Für den Kondensator gilt:  $Q = C \cdot U$  mit  $C = \epsilon_0 \cdot \frac{A_{cond}}{d}$ . Man erhält  $Q = \epsilon_0 \cdot A_{cond} \cdot \frac{U}{d} = \epsilon_0 \cdot A_{cond} \cdot E$ . Man erhält:

$$\frac{dQ}{dt} = \epsilon_0 \cdot A_{cond} \frac{\partial E}{\partial t} \quad (10.15)$$

Wir definieren hiermit den Verschiebungsstrom als:

$$I_V = \epsilon_0 \cdot A_{cond} \cdot \frac{\partial E}{\partial t} \quad (10.16)$$

Dieser Strom ist gleich dem Strom  $I$  der aussen fließt. Wir nehmen nun an, dass der Verschiebungsstrom genauso einen magnetischen Feldwirbel erzeugt. Wir definieren nun die Verschiebungsstromdichte:

$$\vec{j}_v = \epsilon_0 \cdot \frac{\partial E}{\partial t} \quad (10.17)$$

Wir erhalten nun ein neues Ampèresche Gesetz:

### Ampère'sche Gesetz

$$\frac{1}{\mu_0} \oint_{Rd(A)} \vec{B} \cdot d\vec{r} = I + I_v = \iint_A (\vec{j} - \vec{j}_v) d\vec{f} \quad (10.18)$$

Jetzt haben wir bei unserem Gedankenexperiment auch im Kondensator das magnetische Feld, und man hat egal von der Form der Kreisfläche den gleichen Feldwirbel. Wir haben also die Widersprüche beseitigt.

### Maxwellgesetz

Wir erhalten jetzt als neues Maxwellgleichung:

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (10.19)$$

Wobei der letzte Term der Maxwellsche Verschiebungsstrom ist. Ein magnetischer Feldwirbel kann also aus einem Strom sowie durch ein zeitlich veränderliches elektrisches Feld. (Dies ist analog zu  $\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ ).

### Ladunserhaltung

Wir wollen jetzt dieses Gesetz noch für die Ladungserhaltung überprüfen, durch eine Divergenzbildung:

$$\begin{aligned} \underbrace{\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{B}}_{=0} &= \mu_0 \operatorname{div} \vec{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \underbrace{\operatorname{div} \vec{E}}_{\rho/\epsilon_0} \\ \operatorname{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} &= 0 \end{aligned}$$

Also stimmt dies mit unserer Ladungserhaltung überein.

## 10.3 Maxwell-Gleichungen für das Vakuum

Wir haben jetzt 4 Maxwellgleichungen kennen gelernt.

### 10.3.1 Die Gleichungen

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (10.20)$$

Also Ladungen sind die Quellen des elektrischen Felds. Bzw. die Ladungsdichte ist die Quelledichte des elektrischen Feldes.

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad (10.21)$$

Das magnetische Feld hat keine Quellen. Der Fluss in eine geschlossene Fläche ist gleich Null. Oder es gibt keine Magnetischen Monopole.

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (10.22)$$

Ein elektrischer Strom umgibt sich mit einem magnetischen Feldwirbel. Das Gleiche gilt für ein zeitlich veränderliches elektrisches Feld. Man kann dies vereinheitlichen indem man  $\epsilon_0 \partial \vec{E} / \partial t$  als Verschiebungsstromdichte bezeichnet.

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (10.23)$$

Das Minus ist die Lenz'sche Regel. Ein zeitlich veränderliches magnetisches Feld umgibt sich mit einem elektrischen Feldwirbel.

Diese Gleichungen sind lorentzinvariant, also sie sind relativistisch.

**Homogen / Inhomogen**

Wir unterscheiden zwischen homogenen und inhomogenen Gleichungen. Homogene sind jene in denen nur  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  drin stehen. Im Vakuum bleibt nur der homogene Anteil der Gleichungen übrig, da die Anteile mit  $\rho$  und  $\vec{j}$  wegfällt. Wir erhalten für das Vakuum also die Gleichungen:

$$\operatorname{div} \vec{E} = 0 \quad (10.24)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad (10.25)$$

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (10.26)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (10.27)$$

Wir haben auch noch kennengelernt:

**Lorentzkraft**

$$\vec{F} = q(\vec{E} - \vec{v} \times \vec{B}) \quad (10.28)$$

Mit dieser Gleichung hat man alle nötigen Gleichungen, um elektrodynamische Prozesse zu beschreiben.

**10.4 Magnetische Eigenschaften der Materie**

Bei den elektrischen Eigenschaften haben wir jedem Molekül ein elektrisches Dipolmoment zugeordnet haben. Hier gehen wir analog vor und ordnen jedem Atom ein magnetisches Dipolmoment zuordnen. Wir nehmen hierzu an, dass die Elektronen, um den Atomkern kreisen wie im Bohrschen Atommodell, und so einen Kreisstrom darstellen. Dies stimmt nicht mit der heutigen Quantenmechanik überein.

**10.4.1 Magnetische Dipole**

Dieser ist im Wesentlichen ein Kreisstrom. Wir haben eine Stromschleife mit Flächenvektor  $\vec{A}$  durch die ein Strom  $I$  fließt. Wir beschreiben dies mit dem magnetischen Dipolmoment  $\vec{p}_m = I \cdot \vec{A}$ . Was passiert mit diesem Dipol im magnetischen Feld? Im elektrischen Fall war dies einfach, es kam immer zur Schwächung.

**In einem homogenen äußeren Magnetfeld**

Wir haben das homogene äussere Feld  $\vec{B}^{(a)}$ . Wir haben die Rechteckige Fläche  $A$  zur Berechnung unseres Dipol. Mit den Seitenlängen  $a$  und  $b$  in Richtung:  $\hat{e}_a, \hat{e}_b$ . Es gilt:  $\hat{e}_a \perp \vec{B}^{(a)}$ . Es gilt:  $\vec{F} = I \cdot \vec{l} \times \vec{B}^{(a)}$ . Die Leiterstücke  $b$  sind gegensinnig durchflossen und liegen auf der gleichen Wirkungslinie, deswegen kompensieren sie sich.

Wir betrachten also nur die Kräfte auf die Leiterstücke  $a$ . Diese sind auch gegensinnig durchflossen und deswegen gleichgross. Sie liegen aber nicht auf derselben Wirkungslinie, deswegen kommt es

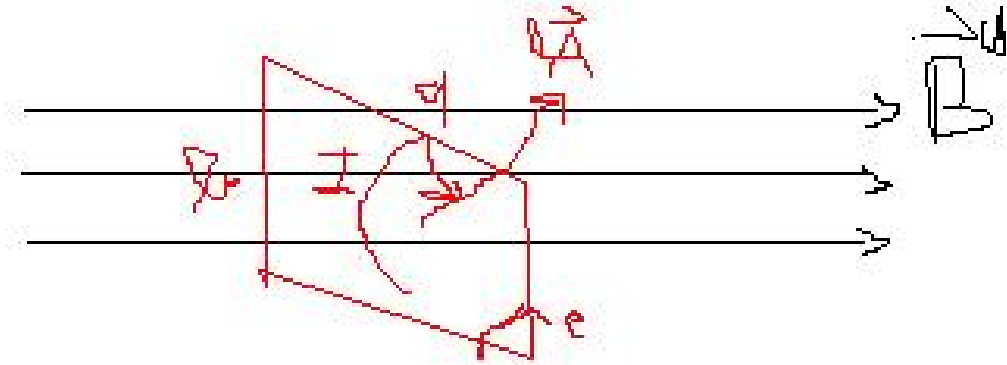


Abbildung 10.4: Magnetischer Dipol im Magnetfeld

zu einem Drehmoment.

$$\begin{aligned}
 \vec{F}_1 &= I \cdot \underbrace{a \cdot \hat{e}_a}_{\vec{l}} \times \vec{B}^{(a)} \\
 \vec{F}_2 &= -I \cdot \underbrace{a \cdot \hat{e}_a}_{\vec{l}} \times \vec{B}^{(a)} \\
 \vec{N} &= b \cdot \hat{e}_b \times \vec{F}_1 \\
 &= b \cdot \hat{e}_b \times (I \cdot a \cdot \hat{e}_a \times \vec{B}^{(a)}) \\
 &= I \cdot a \cdot b \cdot \underbrace{\hat{e}_b \times (\hat{e}_a \times \vec{B}^{(a)})}_{\hat{e}_b \perp \hat{e}_a \quad \hat{e}_a \perp \vec{B}^{(a)}} \\
 \vec{N} &= \underbrace{I a b (\hat{e}_b \times \hat{e}_a)}_{\vec{A}} \times \vec{B}^{(a)} \\
 &\quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{\vec{p}_m}
 \end{aligned}$$

Hiermit erhalten wir für das Drehmoment auf die Stromschleife:

$$\vec{N} = \vec{p}_m \times \vec{B}^{(a)} \quad (10.29)$$

Dies Situation ist wieder ähnlich zur Situation beim elektrischen Feld.

Im Gegensatz zum elektrischen Dipolmoment hatten wir für das den magnetischen Dipol keine Punktladungen zur Verfügung, deswegen haben wir Kreisströme betrachtet.

Im äusseren elektrischen Feld orientiert sich der elektrische Dipol so, dass er sich gegen das elektrische Feld orientiert, und dieses abschwächt. Da gilt:  $\vec{N}_e = \vec{p}_e \times \vec{E}^{(a)}$ . Im Inneren des Dipols wird das E-Feld abgeschwächt.

Hingegen beim magnetischen Dipol, wie oben beschrieben, erhält man  $\vec{N}_m = \vec{p}_m \times \vec{B}^{(a)}$ . Dies führt wieder dazu, dass sich der Dipol parallel zum äusseren Feld ausrichtet, so dass sich das  $\vec{p}_m$  sich gleichsinnig mit dem  $\vec{B}^{(a)}$  ausrichtet. Aber hier ist das Magnetfeld der Stromschleife gleichsinnig mit dem äusseren magnetischen Feld, dies führt zu einer Verstärkung von diesem.



### Atomarer magnetischer Dipol

Wir haben ein geladenes Teilchen mit Ladung  $q$ , das sich auf einer Kreisbahn mit Radius  $R$  mit Bahngeschwindigkeit  $v$ . Dieses Teilchen hat die Masse  $m$ .

Zeit für einen Umlauf:  $\frac{2\pi R}{v}$

Umläufe pro Zeiteinheit:  $\frac{v}{2\pi R}$

Kreisstrom:  $I = q \cdot \frac{v}{2\pi R}$

Winkelgeschwindigkeit:  $|\vec{\omega}| = \frac{v}{R}$

Magnetisches Dipolmoment:  $\vec{p}_m = q \cdot \frac{1}{2\pi} \underbrace{\frac{1}{R}}_{\pi R^2} |\vec{\omega}| \cdot \vec{A} = \frac{q}{2\pi} \underbrace{|\vec{A}|}_{\pi R^2} \cdot \vec{\omega}$ . Wir erhalten also:

$$\vec{p}_m = \frac{q}{2} R^2 \cdot \vec{\omega} \quad (10.30)$$

Drehimpuls dieses Teilchens, wir wählen den Mittelpunkt dieser Kreisbahn als Ursprung.  $\vec{L} = \vec{R} \times (m\vec{v}) = m \cdot \vec{R} \times (\vec{\omega} \times \vec{R}) = m \left[ \vec{\omega} \cdot (\vec{R} \cdot \vec{R}) - \vec{R} \underbrace{(\vec{R} \cdot \vec{\omega})}_{=0} \right] = mR^2 \vec{\omega}$ . Wenn man  $\vec{L}$  mit  $\vec{p}_m$  vergleicht, erhält man:

$$\vec{p}_m = \frac{q}{2m} \vec{L} \quad (10.31)$$

Es zeigt sich, dass der Bahndrehimpuls quantisiert ist:  $\vec{L} = l \cdot \hbar$ , mit  $\hbar = 1.055 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ , und  $l$  der Drehimpulsquantenzahl. Für die Quantenzahl  $l = 1$  erhält man das Bohr'sche Magneton  $\mu_B = \frac{e\hbar}{2m}$ .

### 10.4.2 Materie im Magnetfeld

Wir haben experimentell befunden:

- Materie kann Träger eines Magnetfelds sein.
- Materie bewirkt Veränderung des Magnetfelds
  - Al: Parallelorientierung: Verstärkung des Feldes: Paramagnetismus
  - Bi: Querorientierung: Abschwächung des Feldes: Diamagnetismus
  - Ni: Starke Parallelorientierung: Starke Verstärkung: Ferromagnetismus
- Oberhalb der Curie-Temperatur gehen die ferromagnetischen Eigenschaften verloren.

### Experiment

Probekörper aus Aluminium in einem inhomogenen Magnetfeld. Was passiert nach dem Einschalten? Man sieht, das Aluminium orientiert sich in Richtung des Magnetfelds. Dies ist die sogenannte Parallelorientierung. Bismut orientiert sich quer zum Magnetfeld. Dies ist die Querorientierung. Bei Nickel kommt es dazu, dass es einem der beiden Polschüen klebt, ohne dass das Magnetfeld eingeschaltet ist. Die Orientierung ist parallel zum Magnetfeld, aber deutlich stärker als beim Aluminium.

Um zu zeigen, dass ferromagnetische Stoffe auch paramagnetische Eigenschaften haben, muss man diesen 0.5 Meter über die Polschue geben und man benötigt nur einen Bruchteil des Magnetfelds.

### Curie Temperatur

Wenn die Temperatur zu hoch wird, wird die thermische Bewegung den starken Ferromagnetismus behindern. Die Temperatur, ab der kein Ferromagnetismus mehr auftritt wird die Curietemperatur genannt. Dies passiert für Eisen bei circa  $700^\circ\text{C}$ . Dies passiert aber bei allen anderen Ferromagneten auch. Aber dies ist ein Hochtemperatureffekt.

### Zylindrische Spule im Vakuum

Wir betrachten eine zylindrische Spule im Vakuum. Durch diese fließt ein Strom  $I$ , in der Spule entsteht das Magnetische Feld  $\vec{B}_{vac}$ . Aus dem Ampère'schen Gesetz erhalten wir:  $|\vec{B}_{vac}| = \mu_0 \cdot \underbrace{n \cdot I}$ , wobei  $n$  die Anzahl der Windungen pro Längeneinheit ist. Wir bezeichnen  $\eta = n \cdot I$  als Spulenoberflächenstrom pro Länge. Damit erhalten wir  $|\vec{B}_{vac}| = \mu_0 \cdot \eta$ . Dies ist vergleichbar zur Flächenladungsdichte des Kondensators.

Wenn wir nun Materie in das Innere der Spule. Wir haben nun die neue magnetische Flussdichte  $\vec{B}_{mat}$ . Die eingeschobene Materie wird polarisiert, wir stellen uns dies idealisiert vor, indem wir annehmen, dass alles polarisiert wird. Wir können uns die Moleküle als Zylinder denken. Diese haben den Flächenvektor  $\vec{A}$ , durch die der Strom  $i$  fließt. Wir können uns die Materie in der Spule nun bestehend aus lauter solchen Zylindern denken, und werden zu dem Magnetfeld beitragen.

Wir betrachten nun die **Magnetisierung pro Volumeneinheit**  $\vec{M}$  der hineingeschobenen Materie. Diese ist die Summe aller magnetischen Dipolmomente  $\vec{p}_m$  pro Volumeneinheit:

$$\vec{M} = \frac{1}{V} \sum_V \vec{p}_m \quad (10.32)$$

Wir nehmen nun die Parallelausrichtung aller Dipole an. Hiermit erhalten wir für den Betrag:  $|\vec{M}| = N \cdot |\vec{p}_m| = N \cdot i \cdot A$ . Hierbei ist  $N$  die Anzahl der Moleküle pro Volumeneinheit. Jetzt heben sich die Ströme im Inneren der Materie auf. So, dass nur noch der Strom am Rand überbleibt. Wir müssen jetzt nur noch den Strom an der Oberfläche kennen, um das Magnetfeld in Analogie zur Spule berechnen zu können.

Wir kennen  $1/N$  das Volumen eines Dipolmoleküls. Wir erhalten die Querrdimension des Moleküls  $1/(N \cdot A)$ . Hiermit ist  $N \cdot A$  der Schichten von Dipolmolekülen pro Länge. In jeder Schicht fließt der Strom  $i$ . Deswegen erhalten wir für den Polarisations-Oberflächenstrom pro Länge  $\eta_{pol} = N \cdot \underbrace{A \cdot i}_{p_m} =$

$|\vec{M}|$ . Damit analog zur Vakuumschule erhalten wir:

$$|\vec{B}_{pol}| = \mu_0 \cdot \eta_{pol} = \mu_0 \cdot |\vec{M}| \quad (10.33)$$

$\vec{B}_{pol}$  ist gleichsinnig mit  $\vec{M}$ . Die einzelnen magnetischen Dipolmomente richten sich in die gleiche Richtung aus, deswegen ist  $\vec{M}$ , das durch ihre Aufsummierung entsteht, mit ihnen gleichgerichtet, und  $\vec{B}_{pol}$  auch. Wir können deswegen auf die vektorielle Form übergehen:

$$\vec{B}_{pol} = +\mu_0 \cdot \vec{M} \quad (10.34)$$

Wir betrachten nun das Gesamtfeld  $\vec{B}_{mat}$ : Dieses erhalten wir durch Addition:  $\vec{B}_{mat} = \vec{B}_{vac} + \vec{B}_{mat} = \vec{B}_{vac} + \mu_0 \vec{M}$ . Also führt die Anwesenheit magnetischer Dipole zu einer Erhöhung des elektrischen Felds.

### Konkrete Berechnung

Wir wollen nun konkret  $\vec{B}_{mat}$  berechnen. Zur Polarisation kommt es abhängig von der Form abhängig aus verschiedenen Gründen:

- **Diamagnetismus:** Die Moleküle sind hier am Anfang unpolarisiert. Wir gehen davon aus, dass die Moleküle am Anfang gar keine magnetische Wirkung zeigen. Wenn man nun ein Magnetfeld einschaltet, stellt sich die Materie querr, weil durch Induktion in dem Stoff Kreisströme entstehen, und sich diese wegen der Lenzschen Regel entgegengerichtet dem erregendem Vakuumfeld ausrichten. Man spricht hier von induzierten Dipolen.
- **Paramagnetismus:** Wir haben hier schon vorpolarisierte Moleküle, die Induktionswirkung kann vernachlässigt werden. Wir sprechen hier von permanenten Dipolmomenten, diese richten sich gleichsinnig zum äußeren Feld aus.

- Ferromagnetismus: Dies ist ein starker Paramagnetismus, bei dem fast vollständige Polarisation auftritt. Man spricht hier bei den polarisierten Bereichen von Weisschen Bezirken.

Man kann annehmen, dass  $\vec{M} \propto \vec{B}_{vac}$  ist. Man schreibt deswegen:

$$\vec{M} = \frac{\chi_m}{\mu_0} \cdot \vec{B}_{vac} \quad (10.35)$$

$\chi_m$  ist die magnetische Suszeptibilität. Damit:

$\vec{B}_{mat} = \vec{B}_{vac} + \mu_0 \cdot \vec{M} = \vec{B}_{vac} + \mu_0 \frac{\chi_m}{\mu_0} \vec{B}_{vac}$  Somit:

$$\vec{B}_{mat} = \underbrace{\vec{B}_{vac}(1 + \chi_m)}_{\mu_r} \quad (10.36)$$

Hierbei ist  $\mu_r$  die relative magnetische Permeabilität.

- Diamagnetismus  $\chi_m < 0, \mu_r < 1$
- Paramagnetismus  $\chi_m > 0, \mu_r > 1$
- Ferromagnetismus  $\chi_m \gg 0, \mu_r \gg 1$

### Spule

Ein Ferromagnetium in einer Spule führt dazu, dass das  $\vec{B}$  deutlich grösser wird. Dadurch wird der magnetische Fluss  $\Phi_m = |\vec{B}| \cdot A$  grösser. Hiermit wird die Induktivität  $L = \Phi_m / I$  auch ansteigt.

Stoff	$\chi_m$
Al	$2,3 \times 10^{-5}$
Bi	$-1,66 \times 10^{-5}$
Au	$-3,6 \times 10^{-5}$
Ti	$7,1 \times 10^{-5}$
Fe (gehärtet)	5500
Permalloy (Fe/Ni)	25000
Mu-metall (Ni / Fe / Cu / Cr)	100000

### 10.4.3 Magnetische Feldstärke

Wir schicken durch eine Spule einen Strom (freier Strom), dann entsteht ein Magnetfeld. Wenn wir in diese Spule ein Magneteton geben, entsteht an seiner Oberfläche ein Oberflächenstrom (Polarisationsstrom). Dies ist kein freier Strom, da er bestimmt wird. Wenn wir nun nur ein Feld wollen, dass nur von den freien Strömen abhängt, müssen wir ein neues Feld definieren. In Analogie zu  $\vec{D}$  und  $\vec{E}$ . Deswegen führen wir nun die magnetische Feldstärke  $\vec{H}$  ein. Dieser Vektor charakterisiert das Vakuumfeld, hervorgerufen durch die freien Ströme.

Wir beschreiben nun den Zusammenhang des Magnetfeld mit den freien Strömen in einer Spule: Für die Vakuum-Spule gilt:  $\text{rot} \vec{B}_{vac} = \mu_0 \cdot \vec{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}_{vac}}{\partial t}$ . Das  $\vec{j}$  ist die Dichte des freien Stroms.

#### Definition: Magnetische Feldstärke

Wir definieren die magnetische Feldstärke  $\vec{H}$  durch:

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}_{vac}}{\mu_0} = \frac{\vec{B}_{mat}}{\mu_0 \cdot \mu_r} \quad (10.37)$$

Da  $\mu_0$  eine Dimension hat, werden  $\vec{B}$  und  $\vec{H}$  durch ihre Dimension unterscheidbar sein.

Wir bezeichnen  $\mu = \mu_0 \cdot \mu_r$  als die magnetische Permeabilität. Wir erhalten nun für unsere Maxwell-Gleichung:

$$\text{rot} \frac{\vec{B}_{vac}}{\mu_0} = \vec{j} + \frac{\partial \epsilon_0 \vec{E}_{vac}}{\partial t}$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (10.38)$$

So sind wir die Faktoren aus der Maxwellgleichung losgeworden. Allerdings stehen diese Faktoren jetzt in der Definition.

### Bemerkung

Wir betrachten jetzt die Divergenzen:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{B} &= 0 \\ \operatorname{div}(\mu_0 \cdot \mu_r \cdot \vec{H}) &= \mu_0 \div (\mu_r \vec{H}) = \mu_0 (\mu_r \div \vec{H} + \vec{H} \cdot \operatorname{grad} \mu_r) = 0 \end{aligned}$$

Bei inhomogenen Medien ist  $\operatorname{grad} \mu_r \neq 0$  daraus folgt, dass im Allgemeinen  $\operatorname{div} \vec{H} \neq 0$ .

### Dimension

Für die Dimension der magnetischen Feldstärke gilt:  $[\frac{H}{m}] = [\frac{A}{m^2}]$  und somit  $[H] = [\frac{A}{m}]$ , dies ist analog zu:  $[E] = [\frac{V}{s}]$ .

### Verhalten an Grenzflächen

Wir werden eine analoge Situation zu der bei Dielektra haben. Wir erhalten deswegen **Stetigkeitsbedingungen an Grenzflächen**:

- Magnetische Feldstärke:  $\vec{H}$ :  
Wir gehen davon aus, dass an der Grenzfläche zwischen 2 Medien keine freien Ströme fließen. Es können sehr wohl, Polarisationsströme fließen. Es soll auch kein zeitlich veränderliches elektrisches Feld geben. Somit gilt  $\operatorname{rot} \vec{H} = 0$ . Also gilt  $\oint \vec{H} \cdot d\vec{r} = 0$ , deswegen sind die Tangentialkomponenten der magnetischen Feldstärke  $\vec{H}$  an einer Grenzfläche stetig. Also:

$$\vec{H}_{||1} = \vec{H}_{||2} \quad (10.39)$$

mit den Medien 1 und 2 mit  $\mu_1 \neq \mu_2$ . Wir können die Gleichung also zu:

$$\frac{\vec{B}_{||1}}{\mu_1} = \frac{\vec{B}_{||2}}{\mu_2} \quad (10.40)$$

- Magnetische Flussdichte:  $\vec{B}$ :  
Jetzt gilt  $\operatorname{div} \vec{B} = 0$ . Hier draus folgt  $\oint \vec{B} \cdot d\vec{f}$ , in analoger Argumentation wie bei den elektrischen Feldern folgt, dass die Normalkomponente von  $\vec{B}$  stetig ist. Also:

$$\vec{B}_{\perp 1} = \vec{B}_{\perp 2} \quad (10.41)$$

Also für  $\vec{H}$ :

$$\mu_1 \vec{H}_{\perp 1} = \mu_2 \vec{H}_{\perp 2} \quad (10.42)$$

Dies ist besonders wichtig für einen Magnet mit einem Luftspalt, weil die  $\vec{B}$ -Linien hindurch gehen, aber sehr viele  $\vec{H}$ -Linien entspringen.

Man erhält eine Brechung der  $\vec{B}$ - und  $\vec{H}$ -Linien beim durchtritt durch eine schiefe Grenzschicht. Man erhält das Brechungsgesetz in Analogie zum elektrischen Feld:

$$\frac{\tan \alpha}{\tan \beta} = \frac{\mu_1}{\mu_2} \quad (10.43)$$

Hier gilt wieder das gleiche Gesetz für die  $\vec{B}$  und  $\vec{H}$ -Linien.

Die  $\vec{B}$ -Linien sind stets geschlossen. Die  $\vec{H}$ -Linien beginnen bzw. enden an Grenzflächen.

#### 10.4.4 Hysterese Effekt beim Ferro-Magnetismus

Die Magnetisierung der Ferromagneten geschieht sich durch die spontane Gleichausrichtung der magnetischen Dipole in Weiss'schen Bezirken. (Grafik Hysterese-Kurve einfügen). Die Materialien haben einen Memoryeffekt. Wenn man einen Magneten mit einem Feld magnetisiert hat, und dieses Feld wieder wegnimmt, hat der Magnet noch eine Remanenzmagnetisierung  $M_R$ , und um den Magneten wieder auf 0 zu bringen braucht man eine Koerzitivflussdichte  $B_R$ . Außerdem gibt es eine maximale Magnetisierung (Sättigung). Dies ist eine Hysterese-Schleife.

### 10.5 Maxwell-Gleichungen für ruhende Materie

#### 10.5.1 Gleichungen

##### Maxwellgleichungen

Wir wollen jetzt die Maxwell-Gleichungen für ruhende Materie zusammenfassend aufschreiben.

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho \quad (10.44)$$

Die Quelle der elektrischen Verschiebungsdichte ist die Ladungsdichte.

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad (10.45)$$

Das magnetische Feld ist quelfrei.

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (10.46)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (10.47)$$

Diese Gleichungen können 4-Dimensional in der Raumzeit als Tensoren noch knapper formuliert werden. Diese Gleichungen hängen über die Materialgleichungen zusammen:

##### Materialgleichungen

$$\vec{D} = \epsilon \cdot \vec{E} \quad (10.48)$$

$$\vec{B} = \mu \cdot \vec{H} \quad (10.49)$$

$$\vec{j} = \sigma \cdot \vec{E} \quad (10.50)$$

$\epsilon_0$  und  $\mu_0$  stecken nicht mehr direkt in den Gleichungen, aber sie sind in  $\mu$  und  $\epsilon$  impliziert. Bei anisotropen Materialien werden  $\mu, \epsilon, \sigma$  zu Tensoren. Hierzu kommt noch die Lorentzkraft:

##### Lorentzkraft

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (10.51)$$

#### 10.5.2 Berechnungen

##### Im Vakuum

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{B} &= \mu_0 \vec{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ \operatorname{rot} \frac{\vec{B}}{\mu_0} &= \vec{j} + \frac{\partial (\epsilon_0 \vec{E})}{\partial t} \end{aligned}$$

### Für Magnetikum

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{H} &= \vec{j} + \partial \vec{D} / \partial t \\ \operatorname{rot} \left( \frac{\vec{b}}{\mu_0 \mu_r} \right) &= \vec{j} + \frac{\partial (\epsilon_0 \epsilon_r \vec{E})}{\partial t} \end{aligned}$$

Also wird das  $\epsilon_0$  durch  $\epsilon_0 \cdot \epsilon_r$ , und das  $\mu_0$  durch  $\mu_0 \cdot \mu_r$  ersetzt, um vom Vakuum auf die Materie überzugehen.

### 10.5.3 Beispiel

#### Magnetische Flussdichte für geradlinigen Leiter

Es gilt  $|\vec{B}| = \frac{\mu_0 \mu_r}{2\pi} \frac{I}{r}$ . Also die Flussdichte wird, um  $\mu_r$  grösser.  $\mu_r$  ist die relative Permeabilität des Mediums, um den Leiter.

#### Spule

$|\vec{B}| = \mu_0 \mu_r \cdot n \cdot I$ . Also wieder um  $\mu_r$  grösser. Dies ist bei einem Ferromagneten bis zu einer Vergrößerung um den Faktor  $10^5$ .

#### Ampere'sche Kraftgesetz

$$|\vec{F}| = \frac{\mu_0 \mu_r}{2\pi} \frac{I_1 I_2 l}{d}.$$

#### Selbstinduktivität

$$L = \mu_0 \mu_r n^2 \cdot A \cdot l. \quad (\text{Wichtig beim Eisenkern})$$

#### Magnetische Energiedichte

$$w_m = \frac{\vec{B}^2}{\mu_0 \mu_r} = \frac{1}{2} \vec{B} \vec{H}$$

# Kapitel 11

## Elektromagnetische Schwingungen

Dieses Kapitel ist von vielen praktischen Anwendungen motiviert. Wir gehen hier noch davon aus, dass wir die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Felder vernachlässigt werden kann. Also, dass alles simultan passiert. Wir sind durch elektrotechnische Anwendungen motiviert. Diese wenden folgende Gesetze an:

- Ampere-Gesetz
- Biot-Savart-Gesetz
- Induktionsgesetz
- Lorentzkraft

Es ergeben sich aus diesen Gesetzen folgende Anwendungen:

- Generators
- Motors
- Transformator

### 11.1 Wechselstrom

#### 11.1.1 Grundlagen

##### Wechselspannungen

Wir legen an einen Verbraucher eine Wechselspannung an. Für deren zeitlichen Verlauf gilt dann:

$$U = U_0 \cdot \cos \omega t \quad (11.1)$$

Diese Spannung führt zu einem Wechselstrom.

##### Wechselstrom

Für diesen Strom gilt:

$$I = I_0 \cdot \cos(\omega t - \varphi) \quad (11.2)$$

Hierbei ist  $\varphi$  die Phasenverschiebung. Auf Grund der Phasenverschiebung wird das Ohmsche Gesetz nicht ganz analog zu dem für den Gleichstrom sein, um dies analog hinzubekommen braucht man komplexe Zahlen.

**Bezeichnungen**

Wir nennen  $U_0, I_0$  die Amplituden.  $\varphi$  ist der Phasenwinkel bzw. Phasenverschiebung.  $\omega$  ist die Kreisfrequenz.  $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$  ist die Frequenz (50 Hz).  $T = \frac{1}{\nu} = \frac{2\pi}{\omega}$  Schwingungsdauer (20 ms).

**Leistung**

Für die Leistung  $P = U \cdot I$  gilt. Sie hat die doppelte Frequenz von der Spannung, und dass sie immer positiv ist. Dies gilt für gleichphasigen Strom und Spannung ( $\varphi = 0$ ). Wenn hingegen die Phasenverschiebung  $\varphi = 90^\circ = \pi/2$  ist die mittlere umgesetzte Leistung  $P = 0$ . Jetzt führen wir das ganze formal aus:

**11.1.2 Wechselstromleistung****Momentanleistung**

$$P = U \cdot I = U_0 I_0 \cos \omega t \cos(\omega t - \varphi) \quad (11.3)$$

Dies ist eine rasch veränderliche Kurve. Deswegen betrachten wir das zeitliche Mittel:

**Wirkleistung**

Wir betrachten nun die Wirkleistung (gemittelt über 1 Periode):

$$\langle P \rangle = \frac{1}{T} \cdot U_0 \cdot I_0 \int_0^T \cos \omega t \cos(\omega t - \varphi) dt \quad (11.4)$$

Durch diverse (nicht-triviale) Integrationsmethoden erhält man:

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} U_0 I_0 \cdot \cos \varphi \quad (11.5)$$

Dies ist der Cosinus, da bei  $\varphi = 0$  die Leistung maximal ist, und bei  $\varphi = \pi/2$  man keine Leistung hat. Wir definieren nun noch:

- Blindleistung:  $Q = \frac{1}{2} U_0 I_0 \sin \varphi$ .
- Scheinleistung:  $S = \frac{1}{2} U_0 I_0$

Im Fall von der Phasenverschiebung  $\varphi = 0$ . Dann ist die Wirkleistung  $\langle P \rangle = \frac{1}{2} U_0 I_0$ , die Blindleistung ist  $Q = 0$ .

**Effektivwerte**

Für den Fall von  $\varphi = 0$  definieren wir:

$$\begin{aligned} U_{eff} &= U_0 / \sqrt{2} \\ I_{eff} &= I_0 / \sqrt{2} \end{aligned}$$

Damit gilt einfach:

$$\langle P \rangle = U_{eff} \cdot I_{eff} \quad (11.6)$$

Hiermit kann man Wechselstromgrößen schon einmal analog zu Gleichstromgrößen darstellen. Damit man dies verwenden kann, sind Messgeräte für Wechselstrom so geeicht, dass man nicht die Amplitude abliest, sondern den Effektivwert.

Für die Phasenverschiebung  $\varphi = \pi/2$  gilt:  $\langle P \rangle = 0$ . In diesem Fall ist  $Q = S = \frac{1}{2} U_0 \cdot I_0 = U_{eff} \cdot I_{eff}$ . Hiermit haben wir die Leistungsbegriffe für den Wechselstrom eingeführt.



### 11.1.3 Drehstrom

Bei Drehstrom wird vor allem eine Anordnung verwandt, bei dem man 3 drehende Spulen hat, die um je  $120^\circ$  versetzt sind. Diese werden dann im Magnetfeld gedreht, und es ergibt sich eine Phasenverschiebung von  $120^\circ$ . Die Spannung  $U_1, U_2, U_3$  können deswegen wie folgend dargestellt werden:

$$U_1 = U_0 \cos \omega t \quad (11.7)$$

$$U_2 = U_0 \cos(\omega t - 120^\circ) \quad (11.8)$$

$$U_3 = U_0 \cos(\omega t - 240^\circ) \quad (11.9)$$

### Schaltungsmöglichkeiten

- Sternschaltung: Die Spulen werden in der Mitte zusammengeschaltet. Man schliesst diese Spulen dann wieder in sternförmig zusammenfeschalteten Lastwiderständen an. Wenn dann die Widerstände gleich sind, fliesst kein Strom im Nullleiter (Verbindung mitte Lastwiderstände und Spulen).
- Dreiecksschaltung: Die Spulen sind in einem Dreieck zusammengeschlossen, die Verbraucher auch. Man schliesst also immer ein Ende einer Spule an das Ende einer anderen. Es gibt keinen Nullleiter. Man fragt sich jetzt was für Spannung an den Verbraucherwiderständen liegen:

$$\begin{aligned} \Delta U_{12} &= U_0 [\cos \omega t - \cos(\omega t - 120^\circ)] \\ \Delta U_{12} &= -U_0 \cdot \sin(\omega t - 60^\circ) \underbrace{\sin(60^\circ)}_{1/2\sqrt{3}} \\ \Delta U_{12} &= -U_0 \sqrt{3} \sin(\omega t - 60^\circ) \end{aligned}$$

Wir haben nun eine neue Amplitude:  $U_0 \sqrt{3}$ . Dies hat praktische Konsequenzen, da wir normalerweise ein  $U_{eff} = 230V$ , jetzt erhalten wir aber:  $\Delta U_{12eff} = 400V$ .

### 11.1.4 Transformator

#### Unbelasteter Transformator

Ein Transformator besteht aus einem Eisenkern und aus 2 Spulen, die um diesen Eisenkern gewickelt sind. Die eine ist die Primärspule, die andere die Sekundärspule. Wir legen an die Primärspule eine Wechselspannung  $U_1$ , dadurch entsteht im Eisenkern ein magnetischer Fluss  $\Phi_m$ , und an der Sekundärspule eine Spannung  $U_2$ .  $N_1$  ist die Windungszahl der Primärspule,  $N_2$  die der Sekundärspule. Wir gehen, davon aus das wir den Ohmschen Widerstand in dem Kreis Spannungsquelle Primärspule vernachlässigen können

$$\begin{aligned} U_1 &= U_0 \cdot \cos \omega t \\ \text{Stets: } U_1 + \underbrace{U_{ind}^{(1)}}_{-N_1 \cdot \frac{d\Phi_m}{dt}} &= 0 \end{aligned}$$

$\Phi_m$  hängt ausschliesslich von  $U_1 = -U_{ind}^{(1)}$  ab.

$\Phi_m$  wird hervorgerufen von  $I_m$  (Magnetisierungsstrom).

Der Magnetische Fluss ist auch in der zweiten Spule vorhanden, dadurch ergibt sich, dass in der zweiten Spule auch eine Spannung induziert wird:

$$\begin{aligned} U_{ind}^{(2)} &= -N_2 \frac{d\Phi_m}{dt} = U_2 \\ U_{ind1(1)} &= -N_1 \frac{d\Phi_m}{dt} = -U_1 \end{aligned}$$

$$\frac{U_2}{U_1} = -\frac{N_2}{N_1} \quad (11.10)$$

Es gibt keine nennenswerte Wirkleistung in der Primärspule: Dies bedeutet, dass das  $I_m$  um  $\pi/2$  gegen das  $U_1$  phasenverschoben ist.

### Belasteter Transformator

Wir haben nun einen Lastwiderstand an der Sekundärspule. Also wird durch die Sekundärspule ein Strom fließen. Es entsteht ein zusätzlicher magnetischer Fluss. Um das  $\Phi_m$  unverändert zu halten, zieht die Primärspule aus der Spannungsquelle  $U_1$  einen zusätzlichen Strom, damit der zusätzliche magnetische Fluss wieder kompensiert wird.

Damit erhält man, dass eine Wirkleistung umgesetzt wird. Die Wirkleistung im Primärkreis muss gleich der im Sekundärkreis sein. Daraus ergibt sich, bei kleinerer Spannung kann ein grösserer Strom entnommen werden, oder umgekehrt.

### 11.1.5 Wechselstrom-Widerstände

#### Euler-Relation

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \cdot \sin \varphi \quad (11.11)$$

$$\operatorname{Re}(e^{i\varphi}) = \cos \varphi \quad (11.12)$$

$$\operatorname{Im}(e^{i\varphi}) = \sin \varphi \quad (11.13)$$

#### Für Ströme

$$U = U_0 e^{i\omega t} \quad (11.14)$$

$$I = I_0 e^{i(\omega t - \varphi)} \quad (11.15)$$

Die Idee dahinter, ist das die physikalisch relevanten Teile immer reell sind, und deswegen immer der Realteil der beiden sind.

#### Zusammenhang von U, I

Wir wollen den Zusammenhang schreiben als:

$$U = Z \cdot I \quad (11.16)$$

$Z$  ist hier die (Komplexe) Impedanz. Wir wollen, dass diese  $Z$  konstant ist.

$$Z = \frac{U}{I} = \frac{U_0 e^{i\omega t}}{I_0 \underbrace{e^{i(\omega t - \varphi)}}_{e^{i\omega t} e^{-i\varphi}}} = \frac{U_0}{I_0} e^{i\varphi} \quad (11.17)$$

Dieser Faktor ist von der Zeit unabhängig.

$$|Z| = \frac{U_0}{I_0} \quad (11.18)$$

$$\frac{\operatorname{Im}(Z)}{\operatorname{Re}(Z)} = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = \tan \varphi \quad (11.19)$$

### 11.1.6 Spezielle Widerstände

- Ohm'scher Widerstand R:  $U_r = R \cdot I_r$  (Analog zum Gleichstrom, Strom bleibt in gleicher Phase mit der Spannung) R ist eine reelle Zahl, wir haben wieder das Ohme'sche Gesetz.
- Spule mit Induktivität L: An der Spule mit Induktivität L liegt die Spannung  $U_L$ . Nach Kirchhoff muss gelten:  $U_L + \underbrace{U_{ind}}_{-L \frac{dI}{dt}} = 0$  Es gilt also:

$$U_L = L \cdot \frac{dI_L}{dt} \quad (11.20)$$

- Kondensator mit Kapazität C: Durch das wechselnde Aufladen der Platten entsteht ein Wechselstrom. Es gilt:  $U_C = \frac{Q}{C} \Rightarrow \frac{d}{dt}$ :

$$I_C = C \cdot \frac{dU_C}{dt} \quad (11.21)$$

### Berechnung der Impedanzen

Es gilt:  $Z = \frac{U}{I}$ .

- Impedanz des Ohmschen Widerstands R:  $Z_R = \frac{U_R}{I_R} = R$  (reell), keine Phasenverschiebung.
- Impedanz einer Spule (L): Ansatz:  $I_L = I_0 \cdot e^{i\omega t} \Rightarrow U_L = I_0 L \cdot i\omega \cdot e^{i\omega t} = LI_0 \omega e^{i(\omega t + \pi/2)} \Rightarrow$   
Die Spannung eilt dem Strom um  $\pi/2$  vor. Die Impedanz ist:  $Z_L = \frac{U_L}{I_L} = i\omega L$ .
- Impedanz des Kondensators mit Kapazität (C): Ansatz:  $U_C = U_0 \cdot e^{i\omega t} \Rightarrow I_C = C \frac{dU_C}{dt} = U_0 C i\omega e^{i\omega t} \Rightarrow$   
 $I_C = U_0 \omega C e^{i(\omega t + \pi/2)} \Rightarrow$  Strom eilt Spannung um  $\pi/2$  voraus. Für die Impedanz gilt:  
 $Z_C = \frac{U_C}{I_C} = \frac{1}{i\omega C} = \frac{-i}{\omega C}$

### Serienschaltung von R,L,C

Wir haben einen ohmschen Widerstand R, eine Spule L und einen Kondensator C in Serie geschaltet. Es gilt:  $U = U_R + U_L + U_C$  Laut Kirchhoff gilt:  $Z = Z_R + Z_L + Z_C$ . Wir erhalten für die Impedanz:

$$Z = R + i\omega L - \frac{i}{\omega C} \quad (11.22)$$

$$|Z| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \quad (11.23)$$

$$\tan \varphi = \frac{\operatorname{Im}(Z)}{\operatorname{Re}(Z)} = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \quad (11.24)$$

### Serienresonanz

Resonanz tritt ein bei  $\omega L = \frac{1}{\omega C} \Rightarrow$

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (11.25)$$

Es wird der kleinst mögliche Widerstand eintreten, bei angelegter Spannung fließt der grösstmögliche Strom. Man spricht von Resonanz, weil nur bei einer bestimmten Frequenz hohe Ströme fließen können.

Wir sprechen hier von der Serienresonanz, der Serienkreis wird durchlässig.

### Parallelschaltung von R,L,C

Wir haben den Ohmschen Widerstand R, die Spule L und den Kondensator C parallel geschaltet. Die Spannung U ist für jeden der Widerstände die Gleiche für den gesamten Strom gilt:  $I = I_R + I_L + I_C$ . Man erhält:

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_R} + \frac{1}{Z_L} + \frac{1}{Z_C} \quad (11.26)$$

$$\frac{1}{a+ib} = \frac{a-ib}{(a+ib)(a-ib)} = \frac{a-ib}{a^2+b^2} \quad (11.27)$$

$$|Z| = \frac{R}{\sqrt{1+R^2(\omega C - 1/(\omega L))^2}} \quad (11.28)$$

$$\tan \varphi = -R \left( \omega C - \frac{1}{\omega L} \right) \quad (11.29)$$

### Parallelresonanz

Resonanz tritt ein bei  $I_L = I_C$  also wenn  $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ . Dann wird die Impedanz maximal. Also wird der Kreis sperren, es bleibt nur der ohmsche Widerstand übrig. Aus dem Parallelkreis wird also ein **Sperrkreis**. Es können aber durchaus im Kreis selber Ströme fließen, aber keine durch den Kreis.

## 11.2 Elektromagnetische Schwingkreise

### 11.2.1 Ungedämpfter

Wir haben eine Spule L und einen Kondensator C, diese sind zusammengeschaltet.

$$\begin{aligned} U_{ind} &= -L \frac{dI}{dt} \\ \text{Spannung an C} &= \frac{Q}{C} \\ \text{Kirchhoff} \quad -U_{ind} + \frac{Q}{C} &= 0 \\ L \cdot \frac{dI}{dt} + \frac{Q}{C} &= 0 \quad \left| \frac{d}{dt} \right. \\ L \cdot \frac{d^2 I}{dt^2} + \frac{I}{C} &= 0 \\ \text{Ansatz } A &= a \cdot e^{i\omega t} \\ \frac{d^2 I}{dt^2} &= a \cdot (-\omega^2) e^{-i\omega t} \\ L \cdot a(-\omega^2) e^{i\omega t} + \frac{a}{C} e^{i\omega t} &= 0 \\ \frac{1}{C} &= \omega^2 L \\ \omega &= \frac{1}{\sqrt{LC}} \end{aligned} \quad (11.30)$$

Dies ist die Resonanzfrequenz des Parallelresonators (Sperrkreis).

### Mechanisches Analogon

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + kx = 0 \quad (11.31)$$

Hieraus folgt:  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ .

Vergleichen:  $x \rightarrow I, m \rightarrow L, k \rightarrow \frac{1}{C}$ .

Hiermit erhält man sofort:  $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ , was wieder dasselbe ist.

Man kann sich dies so vorstellen, dass der Kondensator die potentielle Energie und der Magnet die kinetische Energie repräsentiert (mit ihrer Trägheit).

### 11.2.2 Gedämpfte Schwingung

Wir haben jetzt noch einen Widerstand  $R$  im Stromkreis. Es gilt:

$$\begin{aligned} U_{ind} &= -L \frac{dI}{dt} \\ U_R &= I \cdot R \\ U_C &= \frac{Q}{C} \\ -U_{ind} + I \cdot R + \frac{Q}{C} &= 0 \\ L \cdot \frac{dI}{dt} + IR + \frac{Q}{C} &= 0 \\ L \cdot \frac{d^2 I}{dt^2} + R \cdot \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} I &= 0 \end{aligned}$$

Hier kommt jetzt nur noch der Dämpfungsterm  $R \frac{dI}{dt}$  hinzu. In der Mechanik haben wir gelernt  $m \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} + r \cdot \frac{dx}{dt} + k \cdot x = 0$ . Hier wird das  $x \rightarrow I, m \rightarrow L, r \rightarrow R, k \rightarrow 1/C$ . Unsere Gleichungen gehen also über:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (11.32)$$

#### Schwache Dämpfung

$$\left( \frac{r}{2m} < \omega_0 \rightarrow \frac{R}{2L} < \omega_0 \right)$$

Wir haben dann einen periodischen, abklingenden Vorgang:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{r^2}{4m^2}} \rightarrow \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{R^2}{4L^2}} \quad (11.33)$$

Wir haben wieder eine Abklingkonstante  $\gamma$ :

$$\gamma = \frac{r}{2m} \rightarrow \gamma = \frac{R}{2L} \quad (11.34)$$

Damit gilt:

$$x = a \cdot e^{-\gamma t} \cdot e^{i\omega t} \rightarrow I = I_0 e^{-\gamma t} \cdot e^{i\omega t} \quad (11.35)$$

#### Starke Dämpfung

(aperiodische Vorgänge)  $(r/2m \geq \omega_0 \rightarrow R/2L \geq \omega_0)$

$$\alpha = \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \quad (11.36)$$

Damit:

$$x = a \cdot e^{-\gamma t} \cdot (e^{\alpha t} + e^{-\alpha t}) \rightarrow I = I_0 e^{-\gamma t} (e^{\alpha t} + e^{-\alpha t}) \quad (11.37)$$

## 11.3 Offene Schwingkreise

### 11.3.1 Hertz'scher Dipol

Man macht aus der Spule einen einfachen Leiter, dieser ist noch immer eine "Spule" nur halt mit einer deutlich kleineren Induktivität  $L$ . Jetzt kann man noch die beiden Kondensatorplatten trennen. Man hat nun aussen, um die Platten ein elektrisches Feld, das nicht mehr räumlich begrenzt ist. Man geht also von begrenzten zu unbegrenzten Feldern über.

# Kapitel 12

## Elektromagnetische Wellen

Wir lassen jetzt die Voraussetzung fallen, dass die Frequenzen langsam sind, und das alles simultan passiert.

### 12.1 Mechanische Grundlagen

Für die Welle Galt:

$$u(x, t) = u_0 \cdot \cos(\underbrace{\omega t - kx}_{\text{Phase}}) \quad (12.1)$$

Das  $u$  ist die Auslenkung,  $u_0$  die Amplitude (grösst mögliche Auslenkung).  $\omega$  Kreisfrequenz,  $k$  Wellenzahl.

Die Phase ist konstant bei  $\frac{d}{dt}\omega t - kx = 0 \rightarrow \omega - k \cdot \frac{dx}{dt} = 0$  Hierdraus folgt für die Geschwindigkeit der Punkte gleicher Phase:

$$v_{ph} = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k} \quad (12.2)$$

#### 12.1.1 Formeln

$$u(x, t) = u_0 \cos(\omega t - kx)$$

$$v_{ph} = \omega/k$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= u_0(k)(\sin(\omega t - kx)) \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= -u_0(k^2) \cos(\omega t - kx) \\ \frac{\partial u}{\partial t} &= u_0\omega(-\sin(\omega t - kx)) \\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= -u_0\omega^2 \cos(\omega t - kx) \\ \frac{1}{k^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{1}{\omega^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{v_{ph}^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= 0 \\ \Delta \vec{u} - \frac{1}{v_{ph}^2} \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} &= 0 \end{aligned}$$

Dies ist die Wellengleichung.

## 12.2 Elektromagnetische Wellen

Es gelten die Maxwellgleichungen.

### 12.2.1 Wellenausbreitung in Abwesenheit von $\rho, \vec{j}$ Rotationsausbildung

$$\begin{aligned}
 \operatorname{rot}(\operatorname{rot}(\vec{B})) &= \epsilon\mu \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \vec{E} \\
 \underbrace{\operatorname{grad}(\operatorname{div} \vec{B})}_{=0} - \Delta \vec{B} &= \epsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} \\
 \Delta \vec{V} &= \epsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} \\
 \Delta \vec{V} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} &= 0
 \end{aligned} \tag{12.3}$$

$$\begin{aligned}
 \operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{E}) &= -\frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{rot} \vec{B}) \\
 \operatorname{grad}(\operatorname{div} \vec{E}) - \Delta \vec{E} &= -\frac{\partial}{\partial t} \left( \epsilon\mu \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \\
 \Delta \vec{E} &= \epsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \\
 \Delta \vec{E} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} &= 0
 \end{aligned} \tag{12.4}$$

$$c_0 = v_{ph} = \frac{1}{\epsilon\mu} \tag{12.5}$$

### 12.2.2 Im Medium

Es gilt also  $\rho \neq 0, \vec{j} \neq 0$ . Lösung der homogenen Gleichungen: Potentialansatz  $\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}$  Damit wegen  $\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ :

$$\begin{aligned}
 \operatorname{rot} \vec{E} &= -\operatorname{rot} \left( \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) \\
 \operatorname{rot} \vec{E} + \operatorname{rot} \left( \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) &= 0 \\
 \operatorname{rot} \left( \underbrace{\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}} \right) &= 0
 \end{aligned}$$



Ansatz:

$$\begin{aligned}
 \vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} &= -\text{grad}\phi \\
 \vec{E} &= -\text{grad}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \\
 \text{div}\vec{E} = \text{div}\left(-\text{grad}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) &= \frac{\rho}{\epsilon} \\
 -\Delta\phi - \frac{\partial}{\partial t}(\text{div}\vec{A}) &= \frac{\rho}{\epsilon} \\
 \Delta\phi + \frac{\partial}{\partial t}(\text{div}\vec{A}) &= -\frac{\rho}{\epsilon} \\
 \text{rot}(\text{rot}\vec{A}) &= \mu\vec{j} + \epsilon\mu\left(-\text{grad}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t} - \frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}\right)\right) \\
 -\text{grad}\text{div}\vec{A} + \Delta\vec{A} &= \mu\vec{j} + \epsilon\mu\left(\text{grad}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}\right)\right) \\
 \Delta\vec{A} - \epsilon\mu\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} - \text{grad}\left(\underbrace{\epsilon\mu\frac{\partial\phi}{\partial t} + \text{div}\vec{A}}_{=0}\right) &= -\mu\vec{j}
 \end{aligned}$$

Lorentz Eichung  $\text{div}\vec{A} + \epsilon\mu\frac{\partial\phi}{\partial t} = 0$ . Dann gilt:

$$\Delta\vec{A} - \epsilon\mu\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\mu\vec{j} \quad (12.6)$$

$$\Delta\phi + \frac{\partial}{\partial t}(-\epsilon\mu\frac{\partial\phi}{\partial t}) = -\frac{\rho}{\epsilon} \quad (12.7)$$

$$\Delta\phi - \epsilon\mu\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon} \quad (12.8)$$

### Zusammenfassung

- Quellen des Elektrischen und Magnetischen Feldes ist die Ladungsdichte  $\rho$  und die Stromdichte  $\vec{j}$ . (4 Grössen)
- Kontinuitätsgleichung:

$$\text{div}\vec{j} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0 \quad (12.9)$$

(4 Terme: 3 räumliche von  $\text{div}\vec{j}$  ein zeitlicher von  $\partial\rho/\partial t$ )

- E-M-Feld:  $\phi, \vec{A}$  (4 Komponenten)
- Lorentz-Eichung:

$$\text{div}\vec{A} + \epsilon\mu\frac{\partial\phi}{\partial t} = 0 \quad (12.10)$$

Wieder 3 Raumableitungen und eine Zeitableitung.

- 4 Maxwell-Gleichungen
- Wellengleichungen für  $\phi, \vec{A}$  drei zweite Ortsableitungen und eine zweite Zeitableitung.

Aus diesen Gegebenheiten wird eine vierdimensionale Darstellung nahegelegt. Dieser benötigt den Tensorbegriff, und wird fortgesetzt in der Theoretischen Physik.

### Welle vs Schwingung

Schwingungen sind nur zeitlich periodisch, räumlich ist im gleichen Moment alles gleich. Bei einer Welle hat man auch noch eine räumliche Periodizität (also zeitlich und räumlich).

z.B. Lecherleitung siehe Methoden.

Wir sehen experimentell, dass es auf die Lage eines Empfangsdipol bezüglich des aussenden Dipols ankommt. Dies bedeutet, dass die elektromagnetischen Wellen polarisiert sind. Das bedeutet sie sind transversal Wellen.

### 12.2.3 Energiestrahlung

Die Ausbreitung von elektromagnetischen Wellen ist mit einer Energieausbreitung verbunden. Diese wird durch den Poynting-Vektor  $\vec{S}$  beschrieben.

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} \quad (12.11)$$

Dieser zeigt in Richtung der Ausbreitungsrichtung, da  $\vec{E}$  und  $\vec{H}$  beide normal aufeinander stehen und auch normal auf ihre Ausbreitungsrichtung.

### Kondensatoraufladung

Es gibt, um die Leiter ein  $\vec{H}$ -Feld. Nach dem Maxwellschen Verschiebungsstrom gibt es auch einen solchen im inneren des Kondensators. Im inneren des Kondensators gibt es ein  $\vec{E}$ -Feld. Gibt es einen  $\vec{S}$ -Vektor, der nach innen zeigt. Dies bedeutet, dass der Kondensator aufgeladen wird. Die Energie des Feldes wird grösser. Dieser kommt dadurch, dass der Poynting-Vektor immer in den Kondensator zeigt.

Es gibt eine analoge Situation bei dem Stromfluss durch einen Ohmschen Widerstand. Hier repräsentiert aber der  $\vec{S}$ -Vektor das Aufheizen des Leiters.

## 12.3 Wodrin schwingen die Wellen?

Aus der Mechanik war man gewöhnt, dass jede Welle in einem Medium schwingt, um dieses Problem zu lösen führte man den Äther ein

### 12.3.1 Wechsel des Bezugssystem

Wir überlegen uns nun, was mit den Feldern passiert, wenn wir das Bezugssystem wechseln. Dies ist unser Einstieg in die relativistische Physik.

# Kapitel 13

## Relativistische Physik

Wagner will laut eigener Aussage nur das "Was soll das Ganze denn?" vermitteln, um damit unsere Lust auf die mathematisch komplizierten Sachverhalte zu wecken.

### 13.1 Einführung und Grundlagen

#### 13.1.1 E-M-Felder in verschiedenen Bezugssystemen

Wir gehen hierzu von der Lorentzkraft aus. Wir betrachten hier nur Inertialsysteme.

1. Wir betrachten ein System S. Wir haben hier ein Feld  $\vec{E}, \vec{B}$ . Wir haben in diesem Feld eine Ladung q, die sich mit einer Geschwindigkeit  $\vec{v}$  relativ zu diesem System bewegt.

Uns interessiert die Kraft auf Ladung q: \*  $\vec{F} = q \cdot (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$ .

Wir betrachten nun ein System S', dass sich mit der Geschwindigkeit  $\vec{v}$  relativ zu S bewegt. Die Ladung q ruht relativ zu S'. Da wir 2 Inertialsysteme gleich sein muss, muss gelten

\*\*  $\vec{F} = q \cdot \vec{E}'$ , da auf ruhende Ladungen keine magnetische Kraft wirkt. Es muss also eine andere elektrische Feldstärke herrschen.

Vergleich von \* und \*\* ergibt:  $\vec{E}' = \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}$ . Im System S' tritt **zusätzlich** zu  $\vec{E}$  ein elektrischer Feldanteil  $\vec{v} \times \vec{B}$  auf, der aus dem Magnetfeld  $\vec{B}$  erwächst.

Deswegen spricht man nicht von einem elektrischen und magnetischen Feld, sondern von einem elektromagnetischen Feld.

2. Wir betrachten ein System S in dem sich ein ruhender geladener Zylinder befindet. Es gehen also radial in alle Richtung die  $\vec{E}$ -Vektoren weg. Der Zylinder hat einen Querschnitt A, und q ist die Ladung eines Ladungsträgers. n ist die Anzahl der Ladungsträger pro Volumseinheit. r ist der Abstand von der Zylinderachse. Die Ladung für eine Zylinderlänge l ist:  $Q_l = n \cdot q \cdot A \cdot l$ . Hiermit ergibt sich die Ladung pro Zylinderlängeneinheit:  $\lambda = n \cdot q \cdot A$ . Damit erhalten wir für das elektrische Feld:  $|\vec{E}| = \frac{n \cdot q \cdot A}{2\pi\epsilon_0 \cdot r}$ .

Wir betrachten nun ein System S', dass sich mit der Geschwindigkeit  $\vec{v}$  parallel zur Zylinderachse bewegt. Aus der Sicht dieses Systems bewegt sich der Zylinder also mit Geschwindigkeit  $-\vec{v}$  nach unten. Es gibt also aus der Sicht von S' bewegte Ladungsträger. Damit erhalten wir eine Stromdichte:  $\vec{j} = -\underbrace{n \cdot q}_{\rho} \cdot \vec{v}$ . Wir haben also einen Strom  $I = A \cdot |\vec{j}| = n \cdot q \cdot v \cdot A$ .

Wir erhalten also ein Magnetfeld um den Leiter. Für dieses gilt:  $|\vec{B}'| = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{nqvA}{r}$ . Es stellt sich heraus:

$$|\vec{B}'| = \epsilon_0 \mu_0 v \cdot |\vec{E}| \quad (13.1)$$

Es gilt  $c_0 = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$ . Also erhalten wir:

$$|\vec{B}'| = \frac{v \cdot |\vec{E}|}{c_0^2} \quad (13.2)$$

In vektorieller Schreibweise erhalten wir:

$$\vec{B}' = -\frac{1}{c_0^2} \vec{v} \times \vec{E} \quad (13.3)$$

Allgemein ergibt sich hiermit:

$$\vec{B}' = \vec{B} - \frac{1}{c_0^2} \vec{v} \times \vec{B} \quad (13.4)$$

Wir haben gesehen:

$$\vec{E}' = \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \quad (13.5)$$

$$\vec{B}' = \vec{B} - \frac{1}{c_0^2} \vec{v} \times \vec{E} \quad (13.6)$$

Jetzt müsste man die Maxwellgleichungen mit diesen überprüfen würde, würde man merken, dass es nicht passt. Dies wird hier aber nicht ausgeführt. Man erhält damit folgende zusätzlichen Terme in den Maxwellgleichungen. Diese sind proportional zu  $\propto v^2/c_0^2$ .

Man könnte jetzt annehmen, dass es ein ausgezeichnetes ruhendes System mit  $v = 0$  gibt. Dann müsste sich aber die Vakuumlichtgeschwindigkeit verändern, da diese von den Maxwellgleichungen abhängt.

### 13.1.2 Michelson und Morley Experiment

Dieses Experiment fand 1886 statt. Dieses Experiment basiert auf einem Interferometer.

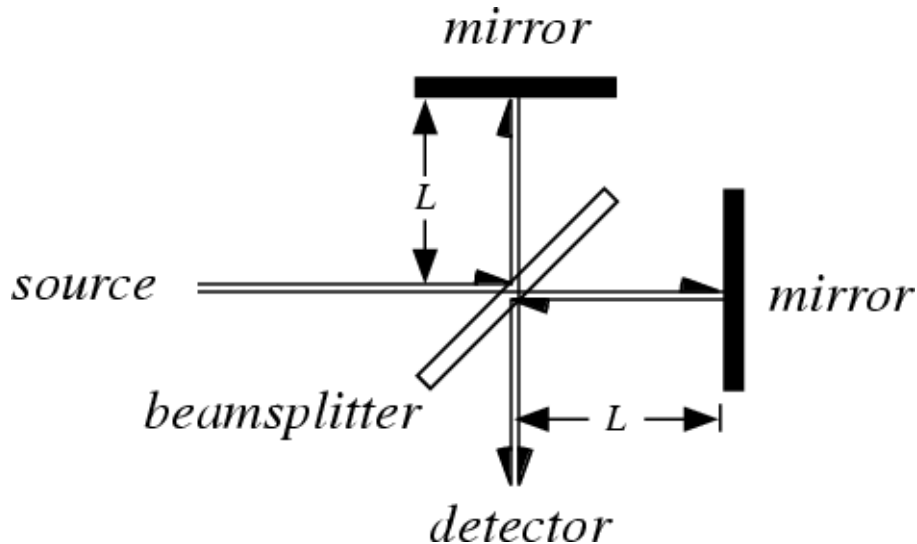


Bild gestohlen von <http://scienceworld.wolfram.com/physics/Michelson-MorleyExperiment.html>. Man stellt fest, dass es keine Bewegung relativ zum Äther gibt. Lorentz hat nun eine Transformation gefunden, bei der die Maxwellgleichungen transformationsinvariant bleiben. Dies ist die sogenannte **Lorentztransformation**.

## 13.2 Relativität

### 13.2.1 Prinzip der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit

Die Vakuumlichtgeschwindigkeit hat in allen Inertialsystemen den gleichen Wert.

Dies folgt prinzipiell schon aus der Richtigkeit der Maxwellgleichungen, da man aus ihnen die Lichtgeschwindigkeit ableiten lässt.

Das Prinzip der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit ist konstant mit dem Relativitätsprinzip, da die Naturgesetze konstant bleiben. Das Problem ist aber wie man transformiert:

### 13.2.2 Gleichzeitigkeit

Um ein System zu betrachten, benötigen wir Licht. Deswegen sind wir nicht in der Lage ein System zu einem Zeitpunkt zu betrachten, sondern können nur das Licht sehen, dass zu uns in dem Moment kommt. Deswegen können wir nicht alles gleichzeitig beobachten.

#### Definition

In einem Inertialsystem: Synchronisation mittels Lichtblitzes. In der Mitte zwischen zwei Uhren steht eine Blitzlampe. Die beiden Uhren beginnen, zu ticken, wenn der Lichtblick sie erreicht. Man kann damit ein Inertialsystem mit synchronisierten Uhren überziehen.

#### Konsequenzen

Damit folgt:

**Ereignisse an verschiedenen Orten, die in einem Inertialsystem gleichzeitig eintreten, finden in einem relativ dazu bewegten Inertialsystem zu verschiedenen Zeiten statt.**

Durch vertauschen von Raum und Zeit erhält man:

Ereignisse zu verschiedenen Zeiten, die in einem Inertialsystem am gleichen Ort eintreten, finden in einem relativ dazu bewegten Inertialsystem an verschiedenen Orten statt.

Die **Gleichortigkeit** gilt also nur in einem Inertialsystem.

Wir müssen also das Konzept der absoluten Zeit und das des Lichtäthers aufgeben.

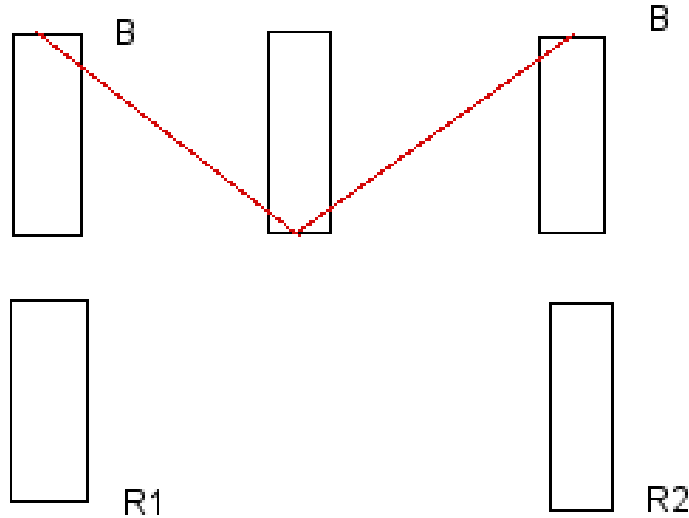
### 13.2.3 Zeitmessung

Zur Zeitmessung braucht man Uhren, dies sind periodisch ablaufenden Vorgänge. Dass wir von Zeit sprechen können, brauchen wir periodisch ablaufende Vorgänge. Da die physikalische Realität nicht von dem Vorgang abhängt, können wir zur Zeitmessung eine Lichtuhr verwenden.

Diese funktioniert mit 2 Spiegeln. Eine Zeiteinheit ist einmal, dass das Licht einmal hin und hergeht.

#### Betrachtung

Wir betrachten ein Inertialsystem mit darin ruhenden synchronisierten Uhren:  $R_1, R_2$ . Eine Uhr B bewegt sich mit der Geschwindigkeit  $v$  daran vorbei. Wir verfolgen nun 1 Hin- und Herlauf des Lichtes in der bewegten Uhr B (1 Periode). Am Beginn der Periode kommt B an  $R_1$  vorbei, am Ende bei  $R_2$ . Die Uhren haben alle die Länge  $l$ .



In Rot der Weg des Lichtes in der bewegten Uhr B.

- Standpunkt der bewegten Uhr B: Periodenlänge  $t_B = \frac{2l}{c}$  (\*).
- Standpunkt der ruhenden Uhren  $R_1, R_2$ : längere Zeit  $t_R$  benötigt für einen Hin- und Herlauf des Lichtsignals in Uhr B. Für die halbe Strecke wird  $c \cdot t_R/2$  benötigt. Für die Uhr legt die Strecke  $v \cdot t_R/2$  zurück. Hiermit erhalten wir mit Pythagoras:

$$\begin{aligned}
 l^2 + v^2 \frac{t_R^2}{4} &= c^2 \frac{t_R^2}{4} \\
 \text{mit *} \Rightarrow \\
 c^2 \frac{t_B^2}{4} + v^2 \frac{t_R^2}{4} &= c^2 \frac{t_R^2}{4} \\
 t_B^2 &= t_R^2 - \frac{v^2}{c^2} t_R^2 \\
 t_B^2 &= t_R^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)
 \end{aligned}$$

Somit erhalten wir:

### Zeitdilatation

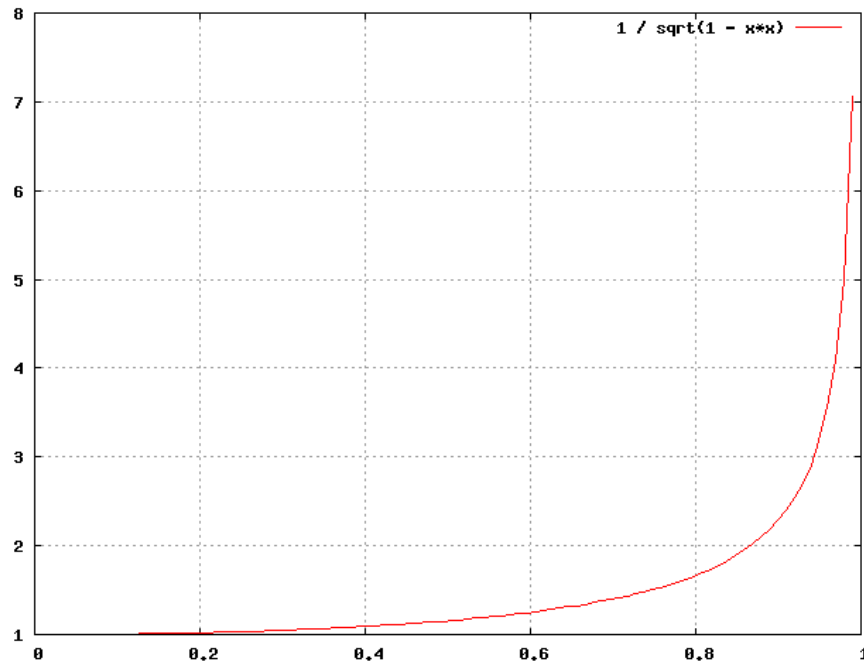
$$t_B = t_R \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (13.7)$$

oder

$$t_R = \frac{t_B}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (13.8)$$

Dies bedeutet, dass Uhren in einem bewegten System langsamer ticken. Das bedeutet, dass kürzere Zeiten gemessen werden.

Bis zu circa der halbe Lichtgeschwindigkeit bleibt die klassische Physik gültig. Danach deviiert dies sehr schnell.



Auf der x-Achse  $v/c$  auf der y-Achse  $k = 1/\sqrt{1-v^2/c^2}$ .

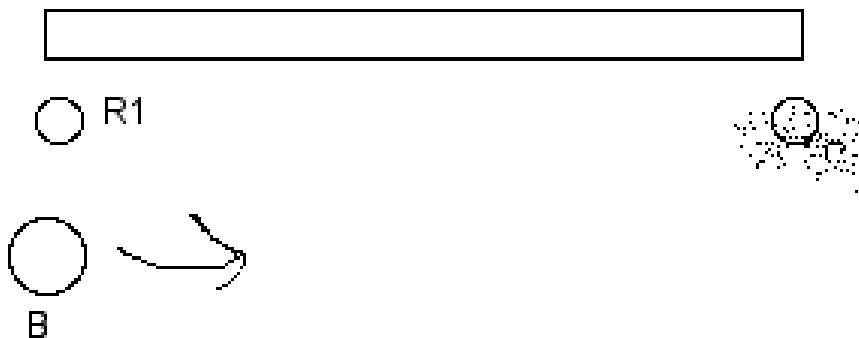
### Experimentelle Nachweise

**1971: Hafele-Keating Experiment** Mit 3 Atomuhren (Genauigkeit 20ns Abweichung pro Tag). 2 stehen an einem Flughafen. 1 fliegt mit Verkehrsflugzeugen, um die Erde. Diese geht danach um 270 ns nach.

Diese Theorie stimmt noch mit sehr vielen anderen Messungen sehr genau überein. **Halbwertszeit von Myonen** bei hohen Geschwindigkeiten in Beschleunigern zerfallen sie langsamer.

### 13.2.4 Längenmessung

Wir wollen unsere Längenmessung im Wesentlichen auf eine Zeitmessung zurückführen. Wir betrachten ein Inertialsystem mit einem darin ruhenden Maßstab. Wir bringen an den Enden dieses Maßstabes zwei synchronisierte ruhende Uhren  $R_1, R_2$  an. Eine Uhr B bewegt sich längs des Maßstabes mit einer Geschwindigkeit  $v$ .



Messung der Länge des Maßstabes durch Messung des Zeitintervalls zwischen dem Vorbeiflug von B am Anfang und am Ende des Maßstabes.

- Standpunkt der ruhenden Uhren (Ruhsystem des Maßstabes):

$$l_R = v \cdot t_R \quad \text{Die Ruhlänge}$$

- Standpunkt der bewegten Uhr B:

$$l_B = v \cdot t_B$$

Aus der Zeitdilation wissen wir, dass  $t_B$  kürzer als  $t_R$  ist. Also erhalten wir:  $l_B = \underbrace{v \cdot t_R}_{l_R} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ .

Damit:

$$l_B = l_R \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (13.9)$$

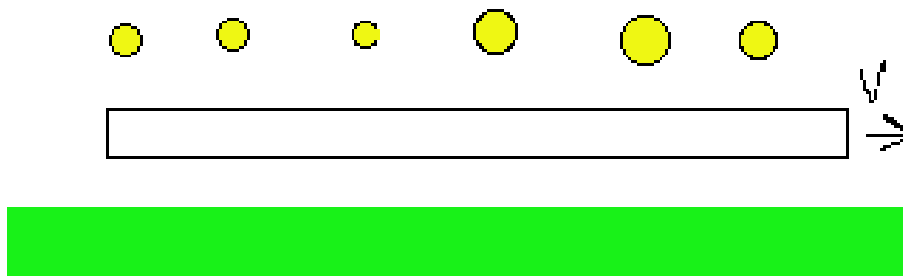
### Begründung

Unter einer Längenmessung versteht man, dass man an ihn einen Maßstab legt und abliest. Bei bewegten Körpern hat man aber ein Problem. Dies funktioniert nur, wenn man gleichzeitig abliest. Aber wir haben keine universelle Gleichzeitigkeit mehr.

Hierbei bemerkt man wieder, dass z.B. die Länge eines Körpers nur etwas ist, was wir dem Körper durch eine Messung zu ordnen und keine universelle Konstante.

### Beispiel

Oben sind Blitzlampen (gelb), und eine fotografische Platte (grün), darüber bewegt sich ein bewegter Körper.





Der Körper wird kürzer als seine Ruhlänge abgebildet werden, da in seinem Ruhsystem die Blitzlampen nicht gleichzeitig gezündet werden werden. Also wieder das Problem von unterschiedlichen Gleichzeitigkeiten.

### Lorentz-Kontraktion

Wir nennen die Verkürzung von bewegten Objekten die Lorentzkontraktion. Diese ist durch schon oben genannte und jetzt folgenden Formel gegeben.

$$l_B = l_R \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (13.10)$$

Diese Längenkontraktion ist keine Stauchung, und betrifft nur die Richtung der Geschwindigkeit. Die Querrdimensionen bleiben unverändert.

### Experimente

Es gibt die Höhenstrahlung (Viktor Hess). Diese entsteht an den oberen Schichten der Erdatmosphäre. Dies sind unter anderem Myonen, welche nach  $1.5 \mu s$ . Diese bewegen sich mit knap der Lichtgeschwindigkeit. Deswegen könnte man sie nie die Erdoberfläche erreichen, dennoch können wir sie messen, weil aus der Sicht der Myonen die Dicke der Erdatmosphäre von 20 km auf 250 m reduziert wird.

## 13.3 Lorentz-Transformation

Wir wollen jetzt zwischen den Bezugssystem wechseln. Hierzu benötigen wir Transformationen. Hierzu betrachten wir 2 Inertialsysteme I und I'. Diese bewegen sich mit der Relativgeschwindigkeit  $v$ .

In dem System I haben wir die Koordinaten:  $x, y, z, t$  und in I'  $x', y', z', t'$ .

#### Annahmen:

- Koordinaten Achsen  $(x,y,z)$  sind senkrecht aufeinander.
- entsprechende Achsen sind parallel zueinander
- Ursprünge fallen für  $t = t' = 0$  zusammen
- Relativbewegung in Richtung der  $x$ -Achse (also auch in Richtung der  $x'$ -Achse)

### 13.3.1 Galilei-Transformation

Wir haben einen Ereignispunkt E. Dieser hat dann die Koordinaten  $(x,y)$  in I, und  $(x',y')$  in I'. Die Distanz zwischen den Ursprüngen ist durch  $v \cdot t$  gegeben. Deswegen gilt:

$$x' = x - vt \quad (13.11)$$

$$y' = y \quad (13.12)$$

$$z' = z \quad (13.13)$$

$$t' = t \quad (13.14)$$

Umgekehrt ist es laut Relativitätsprinzip analog:

$$x = x' + vt' \quad (13.15)$$

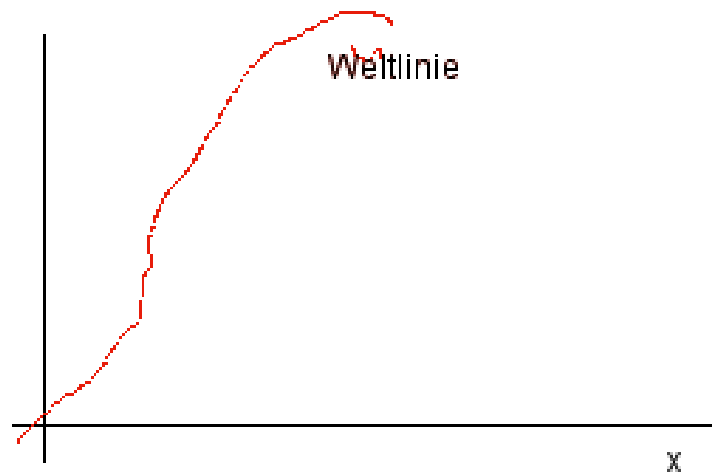
$$y = y' \quad (13.16)$$

$$z = z' \quad (13.17)$$

$$t = t' \quad (13.18)$$

Die Galileitransformation beinhaltet das Relativitätsprinzip.

## 13.3.2 Raum-Zeit-Diagramme

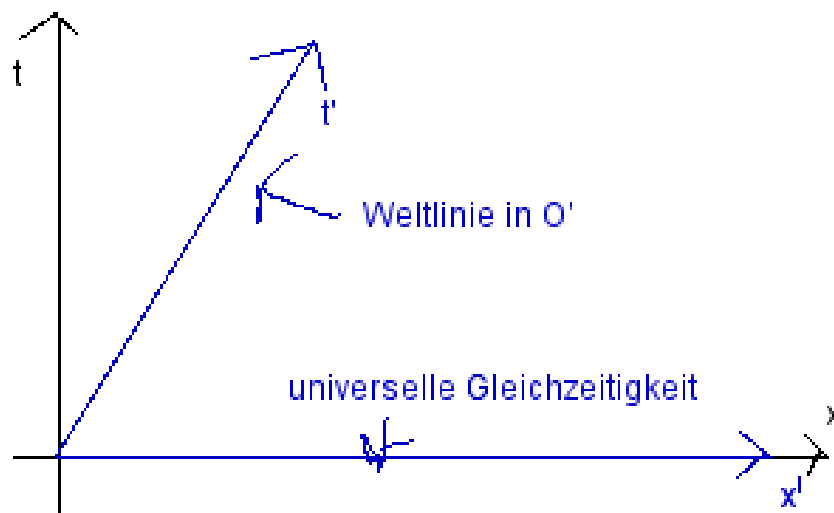


t-Achse :  $x = 0$

x-Achse :  $t = 0$  (gleichzeitig)

**In Bewegung**

Wir transformieren auf ein bewegtes Bezugssystem.



$t'$ -Achse:  $x' = 0 \Rightarrow t = x/v$

$x'$ -Achse:  $t' = 0 \Rightarrow t = 0$

Die absolute Gleichzeitigkeit in allen System bleibt sicher gestellt.

**Konstanz der Lichtgeschwindigkeit**

**Frage:** Enthält die Galileitransformation das Prinzip der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit?

Wir Betrachten ein Lichtsignal, dass sich längs der x-Achse im System I ausbreitet. Dann gilt:

$x = c \cdot t$  Bei Transformation auf das System I' erhält man:  $x' = x - v \cdot t = c \cdot t - v \cdot t = (c - v) \cdot t \Rightarrow$

$x' = (c - v) \cdot t'$ . Hiermit erhält man, dass die Lichtgeschwindigkeit nur noch  $c - v$  wäre. Dies ist ein Widerspruch zur Konstanz der Lichtgeschwindigkeit.

### 13.3.3 Lorentztransformation

Ansatz mit einem Korrektur-Faktor A:

$$\begin{aligned}x' &= A \cdot (x - v \cdot t) \\x &= A \cdot (x' + v \cdot t')\end{aligned}$$

Diese beiden müssen gleichzeitig wegen dem Relativitätsprinzip gelten. Nach dem Prinzip von der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit ergibt sich:

$$\begin{aligned}x &= c \cdot t \\x' &= c \cdot t'\end{aligned}$$

Durch einsetzen erhalten wir:

$$\begin{aligned}c \cdot t' &= A(c \cdot t - v \cdot t) \\c \cdot t &= A(c \cdot t' + v \cdot t')\end{aligned}$$

Multiplikation:

$$\begin{aligned}c^2 \cdot t \cdot t' &= A^2 \cdot t \cdot t' (c^2 - v^2) \\c^2 \cdot t \cdot t' &= c^2 \cdot t \cdot t' \cdot A^2 (1 - \frac{v^2}{c^2})\end{aligned}$$

Hieraus folgt:

$$A = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = k \quad (13.19)$$

### Transformation der Zeit

Wir beginnen wieder oben:

$$\begin{aligned}\frac{x}{k} &= x' + vt' \\ \frac{x}{k} - x' &= vt' \\ t' &= \frac{1}{v} \left( \frac{x}{k} - x' \right) \\ t' &= \frac{1}{v} \left( \frac{x}{k} - k \cdot (x - vt) \right) \\ t' &= \frac{x}{k \cdot v} - \frac{kx}{v} + k \cdot t \\ t' &= k \left( \frac{x}{k^2 v} - \frac{x}{v} + t \right) \\ t' &= k \left( \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \frac{x}{v} - \frac{x}{v} + t \right)\end{aligned}$$

Und wir erhalten:

$$t' = k \left( t - \frac{v}{c^2} x \right) \quad (13.20)$$

Hier haben wir einen qualitativen Unterschied: **Die Zeit wird mittransformiert.**

Nach dem Relativitätsprinzip:

$$t = k \left( t' + \frac{v}{c^2} \cdot x' \right) \quad (13.21)$$

Ansätze für y, z Koordinaten:  $y' = B \cdot y \Leftrightarrow y = B \cdot y'$  Hiermit erhält man  $B = \pm 1$ . Analog für z. Damit erhalten wir die Lorentztransformation:

**Lorentztransformation**

$$x' = k \cdot (x - vt) \quad (13.22)$$

$$y' = y \quad (13.23)$$

$$z' = z \quad (13.24)$$

$$t' = k \cdot \left( t - \frac{v}{c^2} x \right) \quad (13.25)$$

Und:

$$x = k \cdot (x' + vt') \quad (13.26)$$

$$y = y' \quad (13.27)$$

$$z = z' \quad (13.28)$$

$$t = k \cdot \left( t' + \frac{v}{c^2} x' \right) \quad (13.29)$$

Dies ist die ganze Lorentztransformation. Für  $v \ll c$  geht  $k \gg 1$ , und somit annähernd die Galilei-Transformation.

Wir haben zur Herleitung der Transformation nur das Relativitätsprinzip und das Prinzip der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit benutzt.

Wenn wir  $t$  durch  $c \cdot t$  ersetzen also einer Lichtsekunde und analog  $t' \rightarrow t' \cdot c$  erhalten wir:

$$x' = k \left( x - \frac{v}{c} \cdot (c \cdot t) \right) \quad (13.30)$$

$$y' = y \quad (13.31)$$

$$z' = z \quad (13.32)$$

$$c \cdot t' = k \left( c \cdot t - \frac{v}{c} \cdot x \right) \quad (13.33)$$

und

$$x = k \left( x' + \frac{v}{c} \cdot (c \cdot t') \right) \quad (13.34)$$

$$y = y' \quad (13.35)$$

$$z = z' \quad (13.36)$$

$$c \cdot t = k \left( c \cdot t' + \frac{v}{c} \cdot x' \right) \quad (13.37)$$

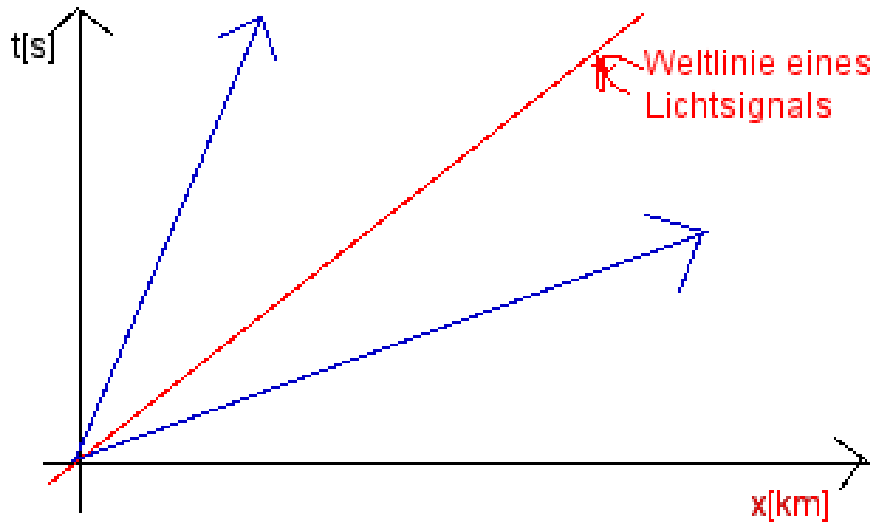
mit

$$k = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (13.38)$$

Hiermit erhält man symmetrische Gleichungen, und alles mit gleicher Dimension. Also sind Zeit und Raum gleichartig enthalten.

Hierbei tut sich bei der Zeit genau das Selbe wie bei der Strecke.

### 13.3.4 Raum-Zeit-Diagramme



In Rot Weltlinie im ruhenden Inertialsystem (schwarz). Wenn wir jetzt ein dazu bewegtes Inertialsystem (in blau) betrachten.

Die t-Achse ist definiert durch  $x = 0$ . Die x-Achse ist die Achse mit  $t=0$ .

#### Transformation auf bewegtes Bezugssystem

Dies ist wieder ein Inertialsystem, also eine konstante Relativgeschwindigkeit. Wenn man annimmt die Relativgeschwindigkeit sei  $v = 1 \times 10^5 \text{ km/h}$  bzw. ein Drittel der Lichtgeschwindigkeit. Dann ist die t'-Achse gegeben durch  $x' = 0 \Rightarrow x = v \cdot t \rightarrow t = \frac{1}{v} \cdot x$ . Für die x'-Achse erhalten wir:  $t' = 0 \Rightarrow t = \frac{v}{c^2} \cdot x$ .

Die Weltlinien der Lichtstrahlen fallen zusammen. Also hätte die Weltlinie eines Lichtsignals wieder die konstante Lichtgeschwindigkeit.

#### Kinetische Ursache

Wenn man sich schneller als die Lichtgeschwindigkeit bewegen würde, könnte man ein Inertialsystem finden, in dem man in die Vergangenheit reisen würde. Dies würde die Kausalität verletzen. Dies ist die sogenannte kinetische Ursache für das Unmöglichsein des Überschreitens der Lichtgeschwindigkeit.

#### Lichtkegel

Wenn man ein dreidimensionales (x,y,t-Achsen) Diagramm betrachtet, erhält man einen Lichtkegel.

## 13.4 Geschwindigkeitsaddition

Wir betrachten einen Körper, der sich mit der Geschwindigkeit  $u$  bewegt. Aus diesem heraus beobachtet man einen anderen Körper, und sieht, dass dieser sich relativ zum ersten Körper mit der Relativgeschwindigkeit  $v$  von ihm wegbewegt. Wie schnell ist dieser Körper von erstem Punkt aus gesehen. Klassisch haben wir die einfache Addition  $w = u + v$ .

### 13.4.1 Realivistisch

Wir haben eine Raumstation R, diese ruht in unserem Inertialsystem. Von dieser aus beobachtet man eine Raumstation R', die sich mit einer Geschwindigkeit  $u$  auf die Raumstation R hinbewegt. Jetzt sendet die Raumstation R' eine Rakete T mit der Geschwindigkeit  $v$  in Richtung von R aus. Wenn  $u = 2/3 c$  und  $v = 2/3 c$ , müsste die Gesamtgeschwindigkeit  $4/3 c$  sein. Dies wäre ein Widerspruch.

#### Richtige Beschreibung

Wir haben die Koordinaten: R:  $x, y, z, t$  und R':  $x', y', z', t'$ .

Für die Geschwindigkeit von T relativ zu R' gilt:

$$v = \frac{x'}{t'}$$

Geschwindigkeit von T relativ zu R:

$$\begin{aligned} w &= \frac{x}{t} = \frac{k(x' + u \cdot t')}{k(t' + \frac{u}{c^2} x')} \\ &= \frac{\frac{x'}{t'} + u}{1 + \frac{u}{c^2} \cdot \frac{x'}{t'}} \end{aligned}$$

Durch ersetzen von  $x'/t'$  mit  $v$  erhalten wir:

$$w = \frac{u + v}{1 + \frac{u \cdot v}{c^2}} \quad (13.39)$$

#### Experimentel

Bewegte  $\pi^0$ -Mesonen bewegen sich mit  $v = 0.99975 \cdot c$ . Diese Mesonen zerfallen sehr schnell, und bei diesem Zerfall ein Photon aus, dass wieder exakt mit Lichtgeschwindigkeit unterwegs weg.

### 13.4.2 Addition mit Lichtgeschwindigkeit

#### Fall 1

Annahme  $u = v = c$ . Man erhält:

$$w = \frac{2c}{1 + \frac{c^2}{c^2}} = c \quad (13.40)$$

Man erhält wieder nur die Lichtgeschwindigkeit.

#### Fall 2

Annahme  $u = 1/2 c$ ,  $v = c$ . Man erhält:

$$w = \frac{\frac{3}{2}c}{1 + \frac{\frac{1}{2}c^2}{c^2}} = c \quad (13.41)$$

## 13.5 Masse und Energie

In dem Linearbeschleuniger von Stanford hat man 1974, kann man Elektronen auf 20.5 GeV beschleunigen. Es würde klassisch folgen, dass die Geschwindigkeit  $v = 283 \cdot c$  wäre. Wenn man einen Lichtblitz parallel zum Elektron laufen lässt, erhält man, dass beide Gleichschnell sind. Dies ist innerhalb von einer Fehlerbreite von  $10^{-6} \Delta t$ .

Das Elektron kann also nicht gleichmässig beschleunigt worden sein, deswegen muss es sich dieser widersetzt haben. Dies geht nach Newton, in dem es seine Masse erhöht. Dies führt zur:

### 13.5.1 Relativistischen Masse

$m_R$  ist die Masse des Körpers, in dem System in dem er ruht.  $v$  ist die Geschwindigkeit mit der sich der Körper bewegt.

$$m = \frac{m_R}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (13.42)$$

Diese Masse ist nur die Beschreibung des Trägheitswiderstands, und nicht der gravitativen Masse. In der allgemeinen Relativitätstheorie kann man folgern, dass dies auch für die gravitative Masse gilt.

Die relativistische Masse wird auch dynamische Masse genannt.

Hieraus kann man folgern, dass die Photonen (Lichtteilchen, bewegen sich mit Lichtgeschwindigkeit) eine Ruhmasse von 0 haben.

### 13.5.2 Einstein Massenformel

Wir formen jetzt die Gleichung, um wir nehmen an  $v$  ist nicht besonders gross. Damit erhalten wir:

$$m = \frac{m_r}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{m_r}{1 - \frac{v^2}{2c^2}} \quad (13.43)$$

Durch Entwicklung:

$$m = m_r \left( 1 + \frac{v^2}{2c^2} \right) \quad (13.44)$$

Wir erhalten:

$$m = m_r \left( 1 + \underbrace{\frac{v^2}{2}}_{E_{kin}} \frac{1}{c^2} \right) \quad (13.45)$$

Also:

$$\underbrace{m - m_r}_{\Delta m} = \frac{1}{c^2} \cdot E_{kin} \quad (13.46)$$

Man erhält also:

$$E_{kin} = \Delta m \cdot c^2 \quad (13.47)$$

Obwohl unsere Herleitung nicht exakt war, erhalten wir die exakte Beziehung.

Auf dieser Beziehung beruht die Kernenergiegewinnung. Weil diese Formel auch für die Annihilation von Teilchen und Antiteilchen gilt, erhält man für die Ruhenergie.

$$E_{ruh} = m_r \cdot c^2 \quad (13.48)$$

### 13.5.3 Gesamtenergie

Wir können uns deswegen eine Gesamtenergie definieren:

$$E_G = E_R + E_K = m_R \cdot c^2 + \underbrace{(m - m_R)}_{\Delta m} \cdot c^2 = m \cdot c^2 \quad (13.49)$$

Also ist die Gesamtenergie die Masse mal dem Quadrat der Lichtgeschwindigkeit.

# Kapitel 14

## Ausblick

Der Milikanversuch hat uns gezeigt, dass Ladungen gequantelt sind.

### 14.1 Photoelektrische Effekt

Mit einem Lichtstrahl ist ein Energietransport verbunden. Dieser führt dazu, dass Elektronen aus einer Metaloberfläche heraus geschlagen werden. Man kann annehmen, dass dies proportional ist. Aber experimental kann man zeigen, dass dies nicht so ist.

#### 14.1.1 Experiment

Man beleuchtet eine Zinkplatte mit weissem Licht. Diese Platte wird geladen, dann wird die Spannung weggenommen. Selbst bei sehr intensiver Beleuchtung passiert nichts. Vor der Lichtquelle stand eine Glasplatte, wenn man diese wegnimmt fällt die Ladung an der Zynkplatte ab.

#### Gedanken

Die Intensität des Lichtes hat sich nur schwach geändert, aber die Zusammensetzung des Lichtes schon. Den Glas ist transparent für sichtbares Licht, aber nicht für UV-Strahlung. Es hat sich also nur die Wellenlänge des Lichts verändert.

#### 14.1.2 Lösungsidee

Einstein hat gemeint, dass dies nur geklärt werden, in dem man sagt, dass Licht aus Teilchen besteht. Da die Frequenz von UV und anderem licht anders ist, und nur UV Elektronen heraus-schlagen kann, muss man annehmen, dass die Energie eines Lichtteilchen proportional zum Licht ist.

Dies setzt die Überlegung mit dem Pointingvektor nicht außer Kraft, da bei niedrig frequenten Licht einfach mehr Photonen fliegen würden.

Dies ist ein **Quantenphänomen**.

#### 14.1.3 Lösung

Für die Energie der austretenden Elektronen gilt:

$$W = \underbrace{h\nu}_E - W_0 \quad (14.1)$$

W ist die elektronen Energie, und  $W_0$  die Asutrittsenergie.  $\nu$  ist die Lichtfrequenz.

$$E = h \cdot \nu = \hbar \cdot \omega \quad (14.2)$$

Dies ist die Photonenenergie.



**Einschub**

$$\begin{aligned}
T &= \frac{2\pi}{\omega} \\
\nu &= \frac{1}{T} \\
\nu &= \frac{\omega}{2\pi} \\
\hbar &= \frac{h}{2\pi} = 1,05 \times 10^{-34} \text{ Js}
\end{aligned}$$

$\hbar$  ist das Plancksche Wirkungsquantum.

**14.1.4 Verknüpfung mit Relativitätstheorie****Impuls eines Photons**

Wir haben gefunden:

$$\begin{aligned}
E &= m \cdot c^2 = \frac{m_0 \cdot c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\
p &= m \cdot v = \frac{m_0 \cdot v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\
\frac{E}{p} &= \frac{c^2}{v}
\end{aligned}$$

Für Photonen ( $v = c$ ):

$$\frac{E}{p} = c \Rightarrow p = \frac{E}{c} = \frac{h\nu}{c} = \frac{\hbar\omega}{c} \quad (14.3)$$

Wir erhalten des weiteren:

$$p = \frac{h\nu}{c} = \frac{h\nu}{\lambda\nu} = \frac{h}{\lambda} \quad (14.4)$$

Wir wissen aus der Wellenlehre:

$$\begin{aligned}
\lambda &= \frac{2\pi}{k} \\
\frac{1}{\lambda} &= \frac{k}{2\pi}
\end{aligned}$$

Hiermit erhalten wir:

**Photonenimpuls**

$$p = h \cdot \frac{k}{2\pi} = \hbar \cdot k \quad (14.5)$$

Wir haben jetzt eine Parallelität von Wellen- und Teilcheneigenschaften.

**14.1.5 Materiewellen**

Wir haben gesehen, Licht kann als Teilchen angesehen. Man kann sich nun fragen, ob auch Teilchen Wellennatur haben, und dies kann man zeigen. Es haben zum Beispiel Davisson und Germer um 1925 gezeigt, dass Elektronenstrahlen interferieren.

Man erhält für die Wellenlänge eines Teilchens:

$$\lambda = \frac{h}{mv} \quad (14.6)$$

Man erhält da, für ein Teilchen von  $m = 1 \text{ g}$  und einem  $v = 1 \text{ cm/s}$  eine Wellenlänge von  $\lambda \approx 10^{-28} \text{ m}$ . Dies ist so gross, dass man es experimentell nicht mehr beobachten kann.

# Kapitel 15

## Optik

### 15.1 Geschichte der Physik des Lichtes

Die Untersuchung des Lichts hat zur Relativitätstheorie sowie zur Quantenphysik geführt, und vieles mehr. Licht hat immer als das Reine gegolten.  
Mit Licht kann man Gegenstände wahrnehmen.

#### 15.1.1 Interpretationen des Lichtes

Wie kann es sein, dass wir etwas als etwas wahrnehmen?

##### Vorsokratiker

Erste verbürgte Interpretation: Sessel sendet “Minisessel” aus, die wir in unserem Auge wahrnehmen.

##### 17. Jahrhundert

Hier beginnt die eigentliche Physik des Lichtes.  
Hier begann die Diskussion, ob Licht ein Teilchen (Newton) oder eine Welle (Hook, Grimaldi, Huygens) ist. Man nahm an, dass nur eines richtig sei. Hier hat als erstes Newton mit der Teilchentheorie gewonnen (vor allem weil er berühmt war).

##### 1802: Thomas Young

Thomas Young war ein englischer Arzt und machte das Doppelspaltexperiment.

Siehe Bild 1

Die Interpretation, war dass es sich dabei um Interferenz handelt. Dies war eine eindeutige Bestätigung des Wellenbilds.

##### Wellentheorie

Diese wurde von Fresnel, Kirchhoff und Fraunhofer weiterentwickelt.

##### Maxwell

Licht ist eine elektromagnetische Welle. Er hat im Wesentlichen festgestellt, dass:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \quad (15.1)$$

Dies hat er vermutet, und es sich dann bestätigt.

### Hohlraumstrahlung

Bei diesem Problem geht es um das Problem des Spektrums glühender Körper. Man heißt einen Hohlraum von aussen mit einer Heizung. Die Wände haben eine Temperatur  $T$ . Es wird sich ein Gleichgewicht einstellen. Man misst, dann die Strahlung durch ein kleines Loch.

Siehe Bild 2

Man hat dann ein Gleichgewicht von Emission und Absorption im inneren des Körpers. Hierbei geht es, um die Untersuchung der Gleichgewichtsstrahlung. Man kann schon die Intensitätsverteilung.

Siehe Bild 3

Man wusste seit Kirchhoff, dass das Spektrum nur von der Temperatur abhängt. Dies heißt zum Beispiel auch, dass die Strahlung unabhängig von der Beschaffenheit der Wände ist. Man wusste, dass etwas eine einfache Erklärung haben müsste, wenn es nur von einem Parameter abhängt. Diese Experimente wurden im wesentlichen von 1895 - 1900 von Rubens und Kurlbaum an der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt in Berlin gemacht.

Es war sehr schnell klar, dass die Wellentheorie zur Erklärung dieses Spektrums nicht geeignet war.

### Max Planck 1900

Max Planck hat sich zu einem sogenannten Akt der Verzweiflung gezwungen, in dem er annahm:

$$E = nh\nu \quad (15.2)$$

Wobei  $E$  die Energie des Lichtes,  $n$  eine natürliche Zahl,  $\nu$  die Frequenz des Lichtes, und  $h$  das Planck'sche Wirkungsquantum.

$$h = 6,6 \times 10^{-34} \text{ Js} \quad (15.3)$$

Planck hat also angenommen, dass Licht nur aus Quanten besteht (etwas unteilbares). Später kam dann noch hinzu, dass Licht aus Teilchen besteht den sogenannten Photonen.

Dies führte zum:

### Welle-Teilchen Dualismus

#### 15.1.2 Lichtgeschwindigkeit

##### Galileo Galilei

Das erste Experiment hat Galileo Galilei durchgeführt. Er hat auf 2 Berggipfeln in der Toskana.

Siehe Bild 4

GG. stand auf einem Berggipfel sein Assistent auf einem anderen. Sie wollten ihre Laternen abdecken, wenn sie sehen, dass der andere sein Licht abdeckte. Galilei stellte fest: **Licht ist schneller als ich messen kann.**

##### Olaf Römer

Siehe Bild 5

Jetzt hat Olaf Römer die Verfinsterung des Mondes (IO) des Jupiters beobachtet. Dies hat er als Uhr genommen. Immer wenn die IO in den Schatten des Jupiters tritt wird es Fenster. Olaf

Römer stellte nachdem die Erde auf der anderen Seite der Sonne bezüglich des Jupiters war, eine Verzögerung dar. Man konnte deswegen sagen:

$$c = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{300 \cdot 10^9 m}{1000 s} = 3 \times 10^8 m s^{-1} \quad (15.4)$$

Weitere Experimente:

### Fizeau

Um 1850. Man hat einen Lichtstrahl, dieser wird durch ein Zahnrad zerhackt.

Siehe Bild 6

Die Zahnreder sind so versetzt, dass kein Licht durchtritt, wenn die Zahnräder still stehen. In wirklichkeit macht man dieses Experiment aber so, dass man nur ein Zahnrad hat, und einen Spiegel nutzt, um das eine Zahnrrad doppelt zu nutzen,

Siehe Bild 7

### Seit 1983

Seit 1983 ist die Lichtgeschwindigkeit definiert als:

$$c = 299792458 m s^{-1} \quad (15.5)$$

Dies ist eine Definition. Man kann dies machen, weil die Lichtgeschwindigkeit konstant ist und deswegen unabhängig ist vom Ausbreitungszustand der Lichtquelle.

Dies ist eine universelle Naturkonstante.

## 15.2 Beschreibung der Ausbreitung des Lichtes

### 15.2.1 Huygens 1692-1695

Huygens lieferte als erster eine physikalische Erklärung der Ausbreitung des Lichts. Licht breitet sich genauso wie Wasserwellen von einem Punkt aus.

Siehe Bild 8

Der vorderste Teil der Welle wird Wellenfront genannt. Jeder Punkt der Wellenfront ist die Quelle einer Sekundärwelle. Die Einhüllende der Sekundärwellen ist die neue Wellenfront.

Huygens hat keine Erklärung hierfür geliefert. Heute können wir dies erklären mit der Supersution der Wellen. Wenn man sich es durchrechnet, erhält man, dass nur die vorne überbleibt. Also wird es mittels **Interferenz** erklärt.

Siehe hierzu Experimente in der Wellenwanne.

### 15.2.2 Fermatsche Prinzip

Wenn Licht von A nach B geht, wirdes den Weg nehmen, der die kürzeste Zeit beansprucht. Kann durch Interferenz erklärt werden.

Siehe bild 9

Die Erklärung von Huygens ist lokal, die von Fermat global. Beide Erklärungen sind auf ihre Weise sehr elegant.

### 15.2.3 Reflexion

Wir haben einen Spiegel. Licht trifft zum Lot auf den Spiegel mit dem Winkel  $\theta_1$  zum Lot auf, und tritt mit dem Winkel  $\theta'_1$  aus.

Siehe Bild 10

Man sieht experimentel, dass  $\theta_1 = \theta'_1$  ist. In Worten: Einfallswinkel ist gleich Ausfallswinkel.

#### Erklärung nach Huygens

Siehe Bild 11

Man kann dies mit den reflektierten Wellen der einhüllenden Zeigen.

#### Erklärung nach Fermat

Siehe Bild 12

Leicht rechnerisch zu zeigen.

### 15.2.4 Brechung

Wir haben eine Trennfläche zwischen 2 Medien mit verschiedener Dichte.

Siehe Bild 13

Ein Lichtstrahl tritt mit dem Winkel  $\theta_1$  zum Lot auf die Trennfläche auf. Es kommt zu einem reflektierten Strahl, und zu einem zum Lot gebrochenem Strahl mit dem Winkel  $\theta_2 < \theta_1$ . (Bei Dichte von Medium 2 kleiner Medium 1).

#### Erklärung von Newton (Teilchenhypothese)

Siehe Bild 14

Durch das eintreten in das Medium treten Kräfte auf, die die Geschwindigkeit des Teilchens Tangential zur Oberfläche erhöht, die Parallele Komponente bleibt gleich. Deswegen würde Licht nach der Teilchenhypothese im Medium schneller als in der Luft werden.

#### Brechungsindex

Der Brechungsindex beschreibt, die Ausbreitungsgeschwindigkeit des Lichtes.

$$c' = \frac{c}{n} \quad (15.6)$$

#### Erklärung nach Huygens

Siehe Bild 15

$$\begin{aligned} \sin \varphi_2 &= \frac{c_2 t}{AB} = \frac{ct}{AB} \frac{1}{n_2} \\ \sin \varphi_1 &= \frac{c_1 t}{AB} = \frac{ct}{AB} \frac{1}{n_1} \end{aligned}$$

Hieraus das folgt das Brechungsgesetz von Snellius:

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 \quad (15.7)$$

**Erklärung nach Fermat**

Es gilt  $y = d - x$ . Wir berechnen nun die Zeiten in den Medien:  $t_1, t_2$ .

$$\begin{aligned}
 t_1 &= \frac{l_1}{c_1} = \frac{l_1 \cdot n_1}{c} \\
 t_2 &= \frac{l_2}{c_2} = \frac{l_2 \cdot n_2}{c} \\
 l_1 &= \sqrt{x^2 + a^2} \\
 l_2 &= \sqrt{(d-x)^2 + b^2} \\
 t &= t_1 + t_2 = \frac{1}{c} n_1 \sqrt{x^2 + a^2} + \frac{1}{c} n_2 \sqrt{(d-x)^2 + b^2} \\
 0 = \frac{dt}{dx} &= n_1 \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} - n_2 \frac{d-x}{\sqrt{(d-x)^2 + b^2}} \\
 &= n_1 \cdot \sin \theta_1 - n_2 \sin \theta_2
 \end{aligned}$$

Womit wir wieder den Schnellius gezeigt hätten.

**Totalreflexion**

Wir nennen es Totalreflexion bei einem Übergang von einem hohen in einen kleineren Brechungsindex. Wir wollen uns nun den kritischen Winkel ausrechnen, bei dem  $\theta_1 = 90^\circ$ . Dann folgt von Schnellius:

$$\theta_{tot} = \arcsin\left(\frac{n_1}{n_2}\right) \quad (15.8)$$

Siehe Bild 17

Dies wird in Glasfaserkabeln, Lichtleitern angewendet. Hierbei ist es ein Problem, dass man sehr viele Reflexionen hat.

Siehe Bilde 18

Die Strecke eines Strahl ist um den Faktor  $\cos \theta$  länger. Ein Strahl auf dem Zickzack weg, braucht deswegen um  $\cos \theta$  länger. Deswegen, wird ein eintretener Plus immer flacher. Dies ist die **Modendispersion**.

Deswegen verwendet **Gradienten Index Fasern**. Diese haben ein parabolisches Brechungsindexprofil. Das Licht braucht, dann in der Mitte länger, und an den Rändern kürzer. Flimmern von Strassen.

Siehe Bild 19

Durch den durch die Hitze veränderten Brechungsindex

**Evaneszente Welle / Feld**

Obwohl es Totalreflexion heißt gibt es noch ein elektrisches Feld oberhalb der Grenzfläche. Die ganze Intensität wird aber reflektiert. Die Stärke des Elektrischen fällt Exponentiell mit der Distanz ab. Die Ausdringtiefe:  $\kappa = \frac{2\pi}{\lambda}$ .

Siehe Bild 20

Dies ist das Evaneszente Welle / Feld (statisch, nicht propagierend)

**Gros-Hähnchen Effekt**

Die ausdretende Welle ist ein bisschen verschoben.

### 15.2.5 Dispersion

Beim Durchtritt durch ein Prisma wird das Licht in seine Spektralfarben zerlegt. Wir betrachten nun die Intensitätsverteilung. Die Intensität beginnt vor dem Rotenlicht. Unser Intensitätsmaximum liegt im Infrarotbereich. Danach fällt die Intensität stark ab.

Dies funktioniert, weil der Brechungsindex abhängig von der Wellenlänge ist.

#### Prisma

Siehe Bild 21

Bei anormaler Dispersion gibt es den Fall:  $n < 1$ . Man hat für den Brechungsindex als Funktion der Wellenlänge:

Siehe Bild 22

#### Ablenkung eines Prismas

Siehe Bild 23

Man sieht:

$$\begin{aligned}\delta &= \alpha_1 - \beta_1 + \alpha_2 - \beta_2 \\ \epsilon &= \beta_1 + \beta_2 \\ \sin \alpha_1 &= n \sin \beta_1 \\ \sin \alpha_1 &= n \sin(\epsilon - \beta_1) \\ \frac{\sin \alpha_2}{n} &= \sin \epsilon \underbrace{\cos \beta_1}_{\sqrt{1 - \sin^2 \beta}} - \cos \epsilon \sin \beta \\ \delta &= \alpha_1 - \epsilon - \arcsin(\sin \epsilon \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha_1} - \cos \epsilon \sin \alpha_1)\end{aligned}$$

Symmetrische Berechnung hat die kleinste Ablenkung.

#### Regenbogen

Der Regenbogen entsteht durch Brechung und Dispersion.

Siehe Bild 24

Ablenkung für blau und violett grösser als für rot, wegen der Dispersion (Wellenlängenabhängigkeit des Brechungsindex). Der zweite Regenbogen ist aussen, wegen grösserem Winkel, und seine Farben sind umgekehrt.

### 15.2.6 Polarisation des Lichtes

Wir haben im Elektromagnetismus gelernt, dass Licht eine elektromagnetische Welle ist. Da die elektrischen Wirkungen deutlich grösser sind als die magnetischen, betrachten wir nur das elektrische Feld.

Siehe Bild 25

Wir verwenden eine Glühlampe, diese emittiert im Gegensatz zu einem Laser unpolarisiertes Licht. Bei solchen Aufbauten bezeichnen wir den ersten Polarisationsfilter als **Polarisator** den zweiten als **Analysator**. Wir machen experimentell folgende Beobachtung:

**Gesetz von Malus**

Wir haben den Winkel zwischen den beiden Polarisatoren  $\theta$ . Für die Intensität erhalten wir.

$$I = I_0 \cdot \cos^2 \theta \quad (15.9)$$

Dies war ursprünglich eine experimentelle Beobachtung. Wie sollen wir dies nun verstehen?

**Lineare Polarisation**

Siehe Bild 26

Für das Feld gilt dann:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cdot \cos(kz - \omega t) \quad (15.10)$$

$z$  ist die Ausbreitungsrichtung.  $k = 2\pi/\lambda$  ist die Wellenzahl.  $\omega = 2\pi\nu$  ist die Kreisfrequenz. Wobei  $\lambda$  die Wellenlänge und  $\nu$  die Frequenz ist.

Dies bedeutet an verschiedenen Orten ist die Feldstärke verschieden gross. Solches Licht bezeichnen wir als linear polarisiert entlang der x-Richtung ( $E_y = 0$ ). Elektromagnetische Wellen sind immer transversal polarisiert, dass heißt sie schwingen normal zur Ausbreitungsrichtung (sonst gäbe es etwas schneller als Licht).

Dipole erzeugen polarisierte elektrische Felder.

**Polarisationsfilter**

Durch einen Polarisationsfilter wird nur eine Schwingungsrichtung transmittiert. Wie funktioniert er?

Für Mikrowellen:

Siehe Bild 27

Wenn das elektrische Feld in Richtung der Leitungen schwingt, entsteht durch dieses ein oszillierender elektrischer Strom in dem Draht. Dieser wird durch den Ohmschen Widerstand abgebremst, dadurch wird die elektromagnetische Welle abgeschwächt.

Für Licht: Hierfür braucht man Ladungen, die sich auf molekularen Abstand nur in eine Richtung bewegen können. Sie kam vom Herrn Land.

Man nimmt hierzu eine Kunststoffolie mit einem Ladungsträger drin (ursprünglich Jod). Jetzt streckt man die Kunststoffolie, dann werden die langen Polymerketten ausgerichtet, dadurch erhalten die Jodatome ( $J^-$ ) eine bevorzugte Bewegungsrichtung.

**Verständnis**

Siehe Bild 28

Wir können den Schwingungsvektor zerlegen in den Anteil in Richtung des Analysators und gegen sie. Also erhalten wir:

$$|\vec{E}|_{\text{transmittiert}} = |\vec{E}| \cdot \cos \theta \quad (15.11)$$

da die Intensität proportional zum Quadrat der Amplitude ist, erhalten wir das Gesetz von Malus:

$$I = I_0 \cdot \cos^2 \theta \quad (15.12)$$

Wenn man 3 Polarisationsfilter benutzt, erhält man einen herauskommenden Lichtstrahl bei Ausrichtung: 0, 45°, 90 Grad, obwohl bei 2 Polarisatoren mit 0, 90 Grad nichts durchkommt.



### Allgemeine Lineare Polarisation

Eine allgemeine lineare Polarisation hat folgende Form, unter der Annahme von Ausbreitung in z-Richtung:

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_{0x} \cos(kz - \omega t) \\ E_{0y} \cos(kz - \omega t) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (15.13)$$

Die beiden Felder oszillieren mit gleicher Frequenz, also oszillieren sie in Phase. (D.h. wenn der eine kleiner wird, wird auch der andere kleiner. Beide haben gleichzeitig ihr Minimum bzw. Maximum, etc.).

Wir können uns nun vorstellen, dass die beiden Vektoren phasenverschoben sind.

### Zirkulare Polarisation

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_{0x} \cos(kz - \omega t) \\ E_{0y} \cos(kz - \omega t + \pi/2) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (15.14)$$

Wir nehmen nun an, dass  $E_{0x} = E_{0y}$  (Dies ist eine Annahme).

Siehe Bild 29

Hierbei wird das elektrische Feld nie 0, da er sich im Kreis bewegt. Als Momentaufnahmen, kann man es sich als Schraube vorstellen. Dies heißt noch immer Welle, da jede Komponente ihr Wellenverhalten.

Dieses Licht ist rechtshändig polarisiert.

Das  $\pi/2$  ist die Anfangsphase oder besser der Phasenunterschied, bzw. Phasendifferenz. Bei  $\pi/2$  Rechts-polarisiert. Bei  $-\pi/2$  Links polarisiert.

Bei anderen Phasendifferenzen oder verschiedenen Amplituden.: Elliptisch polarisiert. Also bei  $E_{0x} \neq E_{0y}$  oder  $\Delta\phi \neq 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$ .

Siehe Bild 30

### Erzeugung von Polarisation

Es gibt vier Arten polarisation zu Erzeugen:

1. Polarisation durch Absorption mit polarisations Filter. Dies wird auch **Dichroismus** genannt.
2. Polarisation durch Streuung.
3. Polarisation durch Brechung
4. Polarisation durch Doppelbrechung

Es gibt aber noch andere, die sind aber nicht so bedeutsam.

### Polarisation durch Streuung

Wir haben einen geladenen Punkt, dieser ist geladen. Auf diesen trifft ein unpolarisiertes Lichtstrahl.

Siehe Bild 31

Wir betrachten nur, dass Licht, das unter  $90^\circ$  gestreut wird. Dieser ist polarisiert normal zu seiner Ausbreitungsrichtung und der Richtung in der der Strahl gekommen ist, da sonst das Licht in Richtung der Ausbreitungsrichtung schwingen würden.

Für die 100% polarisation ist wichtig, dass es nur zu **Einfachstreuung** kommt. Dies beobachtet man am Himmel. Die sogenannte **Polarisation des Himmelslichts**.

### Farbe des Himmels

Der Himmel erhält seine Farbe durch Streuung an Dichteschwankungen der Luft. Diese Streuung nennt man Rayleigh-Streuung  $\lambda \gg d$ . Wellenlänge ist grösser als der Durchmesser an dem es gestreuten Teils. Es gilt:  $I \propto \frac{1}{\lambda^4}$ . Kürzere Wellenlängen werden stärker gestreut. Dies bedeutet blau wird viel stärker gestreut als blau.

Dies erklärt nicht nur, warum der Himmel blau ist, sondern auch Abendrot und Morgenrot.

### Polarisation durch Doppelbrechung

Siehe Bild 31

Ein Strahl tritt orthogonal auf die Oberfläche auf. Es kommt nicht nur zum geraden Durchgehen, sondern auch zu einer Brechung (weg vom Lot). Bei diesem Vorgang werden die polarisierten Anteile des Lichtes getrennt.

Experimentel haben wir gesehen, dass sich der außerordentliche Strahl mitdreht, wenn man den Kalkspat dreht, deswegen führen wir eine Optische Achse ein.

**Beschreibung** Das Brechungsgesetz gilt nicht für den außerordentlichen Strahl. Verständnis? Am Besten zu verstehen mit der Huygensschen Konstruktion. Im Fall der Doppelbrechung sind die Elementarwellen Ellipsoide. Dies bedeutet, dass die Lichtgeschwindigkeit richtungsabhängig ist. Da für den Brechungsindex gilt  $n = c/v$  mit  $v$  die Lichtgeschwindigkeit im Medium, ist der Brechungsindex auch richtungsabhängig, oder **anisotrop**. Man führt deswegen ein **Brechungsindexellipsoid** ein.

Siehe Bild 32

Man nennt die optische Achse, das wo der Ellipsoid mit dem Kreis zusammenfällt.

Damit man dies haben kann, braucht man schon einmal einen Kristall, der anisotrop ist.

Hiermit kann man zirkular polarisiertes Licht erzeugen.

### Erzeugung zirkular polarisiertem Lichts

Hiezu nimmt man ein Blättchen, bei dem die Optische Achse in der Ebene des Blättchens liegt. Es kommt zu keiner Aufspaltung. Aber die Lichtgeschwindigkeiten für die verschiedenen Polarisationen sind verschiedenen. Wenn man nun linear polarisiertes Licht auf den Kristall schickt, wird ein Teil zum anderen verzögert. Wenn die Verzögerung  $90^\circ$  in der Phase entspricht, erhält man zirkular polarisiertes Licht. Diese Verschiebung muss um ein Viertel der Wellenlänge sein. Deswegen werden dies Plättchen  $\lambda/4$  - Plättchen genannt.

### Spannungsinduzierte Doppelbrechung

Wenn ich ein isotropes Material spanne, wird es anisotrop und doppelbrechend. Die optische Achse wird dann parallel zur Kraft.

Da der Effekt der Doppelbrechung Wellenlängen abhängig ist, ist er dispersiv.

Die Doppelbrechung wird für die Entlastungsbohrung angewendet.

### Polarisation durch Brechung

Siehe Bild 33

Wenn der Winkel zwischen dem gebrochenem und dem reflektierten Strahl  $90^\circ$  ist, ist der reflektierte Strahl reflektiert. Sonst würde Licht in Richtung des reflektierten Strahls schwingen. Der

gebrochene Strahl ist nicht zu 100% polarisiert. Es gilt:

$$\begin{aligned} n_1 \sin \theta_1 &= n_2 \sin \theta_2 \\ \theta_2 + \theta_1 + \frac{\pi}{2} &= \pi \\ \theta_2 &= \frac{\pi}{2} - \theta_1 \\ \sin \theta_2 &= \cos \theta_1 \\ n_1 \sin \theta_1 &= n_2 \cos \theta_1 \end{aligned}$$

Hieraus folgt mit  $\theta_1 \rightarrow \theta_B$ .

$$\tan \theta_B = \frac{n_2}{n_1} \quad (15.15)$$

Dies ist der Brewster-Winkel. Also wenn ein Strahl unter dem Brewster-Winkel einfällt, ist er polarisiert.

### Optische Aktivität

Es kann sein, dass der Brechungsindex für rechtspolarisiertes Licht ungleich dem für linkspolarisiertes Licht ist. Also kurz:

$$n_R \neq n_L \quad (15.16)$$

Dies kann bei Molekülen in Schraubenstruktur auftreten, aber bei fast allen Molekülen mit biologischer Relevanz gibt es Unterschiede für rechts- und linkshändige. **Beispiele:** Zucker.

Man kann jetzt sagen linear polarisiertes Licht kann als Anteil von rechts- und linkszirkular schwingenden Licht angesehen werden. Wenn jetzt die Geschwindigkeiten von den beiden unterschiedlich ist, kommt es zu einer Drehung vom linearpolarisiertem Licht.

## 15.3 Geometrische Optik

Jetzt geht es um das Verständnis von optischen Instrumenten. Wir ignorieren den Wellencharakter vom Licht. Dieser wird vernachlässigt. Wir können deswegen von geradliniger Lichtausbreitung sprechen. Wir können deswegen **Strahlen** einführen. Wir werden nun Spiegeln und Linsen anschauen, und Zusammensetzungen aus diesen.

### 15.3.1 Spiegeln

Es gibt verschiedene Spiegel. Als erstes betrachten wir den einfachsten.

#### Ebener Spiegel

Wir wissen Einfallswinkel ist gleich Ausfallswinkel. Wir betrachten nun ein paar Strahlen.

Siehe Bild 34

Wenn man die reflektierten Strahlen nach hinten verlängert treffen sie sich in einem Punkt. Diesen Punkt nennt man das Bild. Das Original nennt man immer den Gegenstand.

In diesem Fall haben wir ein **virtuelles** Bild, da das Bild hinter dem Spiegel auftritt, wo eigentlich kein Licht ist.

Anwendung ist das Katzenauge.

**Katzenauge**

Man hat 2 rechtwinklige Spiegel, ein Lichtstrahl wird genau zurückgeworfen

Siehe Bild 36

Die Vorteile sind:

1. Rückreflektion unabhängig von der Einfallsrichtung.
2. Spiegel ist nicht Seitenverkehrt.

Angewendet bei Rückstrahlern mit Totalreflektion.

**Sphärischer Spiegel**

Dies ist ein Spiegel bei dem die Spiegeloberfläche eine Kugel ist. Man sieht experimentell, dass sich die Strahlen in einem Punkt treffen. Diesen nennt man den Brennpunkt.

Siehe Bild 35

Der Punkt in dem sich parallele Strahlen aus dem Unendlichen treffen, heißt Brennpunkt bezeichnet mit F für Fokus. Distanz Spiegel, Brennpunkt wird mit klein f bezeichnet. Dies ist die Brennweite des Spiegels. Für sphärische Spiegel gilt:

$$f = \frac{R}{2} \quad (15.17)$$

Dies gilt nur für Strahlen nah an der Achse. Dies sind achsennahe Strahlen sogenannte **paraxiale Strahlen**.

**Art eines Spiegels Abbildungen zu erzeugen**

Das Bild entsteht, dort wo sich die Strahlen schneiden.

Siehe Bild 37

Die Winkel von ein- und ausfallendem Strahl zur normalen zur Spiegeloberfläche müssen gleich sein. Der Mittelpunktstrahl geht auf gleichem Weg auch reflektiert. Wenn man nur paraxiale Strahlen betrachtet, kann der Fehler vernachlässigt werden, und man kann sagen alle Strahlen treffen sich in P. Es gilt:

$$\begin{aligned} \text{Aussenwinkel } \beta &= \alpha + \theta \\ \gamma &= \alpha + 2\theta \\ \text{Elimination von } \theta \quad 2\beta &= \alpha + \gamma \end{aligned}$$

Für kleine Winkel gilt:

$$\begin{aligned} \alpha &\approx \frac{l}{g} \\ \beta &= \frac{l}{r} \\ \gamma &\approx \frac{l}{b} \end{aligned}$$

Durch einsetzen in die Winkelgleichung erhalten wir:

$$\frac{2}{r} = \frac{1}{b} + \frac{1}{g} \quad (15.18)$$

Dies ist ein einfaches Ergebnis mit  $r$  der Radius des Spiegels,  $b$  die Bildweite und  $g$  die Gegenstandsweite. Wenn wir den Gegenstand ins unendliche legen, also  $g \rightarrow \infty$ , erhalten wir die Brennweite:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{b} = \frac{2}{r} \quad (15.19)$$

Hier mit haben wir nun die Abbildungsgleichung:

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{g} = \frac{1}{f} \quad (15.20)$$

Wir betrachten nochmal den Fall, dass der Gegenstand im unendlichen ist, dann schneiden sich alle reflektierten Strahlen im Fokus  $F$  unter der Annahme der paraxialen Approximation.

Siehe Bild 38

Dies bedeutet nach dem Fermatschen Prinzip, dass alle Wege in den Brennpunkt gleich lang sind, da es der Weg aus dem unendlichen in den Brennpunkt ist.

Dies bedeutet, dass vom Bild zum Bildpunkt alle Wege optisch gleichlang sind.

Dies bedeutet hingegen nach Huygens: Eine Welle aus dem Unendlichen ist eine Ebene Welle.

Siehe Bild 39

Durch Reflexion entstehen also Kugelwellen, die in den Brennpunkt wandern.

### Bild Konstruktion

Siehe Bild 40

Wir haben einen ausgedehnten Gegenstand. Diesen zeichnen wir als einen Pfeil. Wir brauchen uns nur, überlegen, wo die Spitze des Pfeils abgebildet werden.

Um das Bild zu erhalten betrachten wir den Strahl parallel zur Achse. Von diesem wissen wir, dass er nach auftritt auf die Spiegeloberfläche durch den Brennpunkt geht. Von dem Strahl, der durch den Brennpunkt geht, wissen wir, dass er parallel zur Optischenachse austritt. Dann gibt es noch den Zentralstrahl, der unter dem gleichen Winkel reflektiert wird. Diese 3 Strahlen, nennt man die **Hauptstrahlen**:

1. Achsenparallel geht durch den Brennpunkt
2. Brennpunkt wird Achsenparallel
3. Zentralstrahl wird symmetrisch reflektiert.
4. Mittelpunktstrahl wird in sich reflektiert (dieser tritt nicht bei Linsen auf).

Wir erhalten hiermit ein verkehrtes reelles Bild.

### Prinzip der Strahlumkehrung

Wenn ein Strahl von A nach B geht, kann ein anderer Strahl von B nach A gehen. Dies gilt immer, außer wenn ein Magnetfelder eine Rolle spielen.

### Vergrößerung

Wir bezeichnen als die Vergrößerung  $V$  das Verhältnis von Bildgrösse  $B$  zu Gestandsgrösse  $G$ :

$$V = \frac{B}{G} \quad (15.21)$$

Aus geometrischen Überlegungen gilt:

$$\left| \frac{G}{g} \right| = \left| \frac{B}{b} \right|$$

Die Größen  $b, g, f$  sind positiv, wenn sie vor dem Spiegel sind, und negativ hinter dem Spiegel. Wir erhalten deswegen für die Vergrößerung:

$$V = -\frac{b}{g} \quad (15.22)$$

In unserem Beispiel ist  $V < 0$  und  $|V| < 1$ . Das heißt ein verkleinertes, verkehrtes Bild.

### Arten von Bildern

Wir haben gelernt:  $V = B/G = -b/g$ . Es wird eine grösserhaltende Abbildung sein für  $|V| = 1 \Rightarrow b = g$ . Dies tritt auf wenn:

$$\begin{aligned} \frac{1}{f} &= \frac{1}{g} + \frac{1}{b} \\ \frac{1}{f} &= \frac{2}{g} \\ g &= 2f \end{aligned}$$

Dies bedeutet geometrisch, dass sich der Gegenstand im Mittelpunkt des Spiegels ist.

Siehe Bild 41

Für eine Vergrößerung also  $|V| > 1 \Rightarrow b > g$ . Dies tritt ein, wenn  $g$  näher als  $2f$  ist.

Siehe Bild 42

Man erhält ein vergrößertes reelles Bild für  $2f > g > f$ .  
Wenn die Gegenstandsweite kleiner wird als die Brennweite.

Siehe Bild 43

Die Strahlen schneiden sich nicht vor dem Spiegel. Man erhält ein vergrößertes, aufrechtes Bild hinter dem Spiegel. Ein sogenanntes **virtuelles Bild**. Also insgesamt ist das Bild: virtuell, aufrecht und vergrößert. Für das Vergrößerungsverhältnis  $V = B/G = -b/g$ , gilt da  $g > 0$ , aber  $b < 0$  (da hinter dem Spiegel). Hieraus folgt:  $V > 0$ .

Dies war der Hohlspiegel bzw. der ein Konkavspiegel.

### Scheinwerfer

In dem man eine Lichtquelle in den Brennpunkt stellt, erhält man nach dem Prinzip der Umkehrbarkeit von Strahlen, parallel ausbreitendes Licht.

### Konvexspiegel, Wölbspiegel

Siehe Bild 44

Diese Strahlen gehen durch einen Brennpunkt  $F$ , der hinter dem Spiegel liegt. Der Brennpunkt ist also nicht mehr reell sondern virtuell, also ist die Brennweite nach unserer Konvention  $f < 0$ . Für die Bildkonstruktion gilt:

Siehe Bild 45

Man erhält ein virtuelles, aufrechtes und verkleinertes Bild. Dies ist bei einem Konvexspiegel immer so.

### 15.3.2 Linsen

Linsen beruhen auf Brechung. Es gibt Brechung an der Vorder- und Rückseite. Wir überlegen uns zuerst, was bei der Brechung an einer gekrümmten Oberfläche passiert.

#### Brechung an 1. gekrümmten Oberfläche

Wir haben eine Kugeloberfläche. Außen ist Vakuum  $n_v = 1$  bzw. in sehr guter Näherung Luft.

Siehe Bild 46

Im Punkt P ist eine Lichtquelle. Ein Strahl der aus der Lichtquelle kommt wird an der Oberfläche gebrochen. Um die Brechung zu betrachten brauchen wir das Lot. Da im Medium der Brechungsindex grösser ist haben wir Brechung zum Lot. Man könnte zeigen, dass für Strahlen in paraxialer Näherung gilt, dass sie vom Punkt P wieder in dem Punkt P' zusammentreffen. (hier nicht durchgeführt).

Wir verwenden für die Gegenstandsweite  $g$  und die Bildweite  $b$  ähnliche Grössen wie bei dem Spiegel. Der Zusammenhang zwischen den beiden Grössen kann nur vom Radius der Kugel  $r$  und dem Brechungsindex  $n$  abhängen. Beim Spiegel hatten wir die Gleichung:  $1/g + 1/b = 1/f$ . Wir erhalten hier die Gleichung:

$$\frac{1}{g} + \frac{n}{b} = \frac{n-1}{r} \quad (15.23)$$

Wir können auch eine Brennweite definieren. Hierzu  $g \rightarrow \infty$ , dann ist  $b = f$ . Wir erhalten somit:

$$\frac{n}{f} = \frac{n-1}{r} \quad (15.24)$$

$$f = \frac{n}{n-1} r \quad (15.25)$$

### 15.3.3 Linsen mit 2 Gekrümmten Flächen

#### Mögliche Anordnungen von gekrümmten Flächen

Siehe Bild 47

Vorläufig haben wir nur sphärische Linsen besprochen: dies sind Kugeloberflächen. Bei diesen funktioniert die Abbilderei nur für paraxiale Strahlen. Mit Asphärischen Linsen kann man auch achsenferne Strahlen gut abbilden.

#### Bikonvexe Linse

Siehe Bild 48

Wir hatten für eine Fläche die Gleichung:

$$\frac{1}{g} + \frac{n}{b} = (n-1) \cdot \frac{1}{r} \quad (15.26)$$

Es wird zu stärkerer Brechung kommen, trotzdem erhalten wir als Formel:

$$\frac{1}{g} + \frac{1}{b} = (n-1) \cdot \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \quad (15.27)$$

Wir führen aber folgende Vorzeichenkonvention ein.

Siehe Bild 49

Wir ersetzen unsere Linse durch einen Strich mit zwei nach aussen zeigenden Pfeile stehend für bikonvex.

Die Brennweite ist positiv, wenn ein linkskommender Strahl einen Brennpunkt auf der rechten Seite hat. Wir erhalten also schlussendlich: die **Abbildungsgleichung**:

$$\frac{1}{g} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f} \quad (15.28)$$

Mit der Brennweite:

$$\frac{1}{f} = (n - 1) \cdot \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \quad (15.29)$$

Dies ist die **Linsenmacher-Gleichung**.

### Sammellinse

Siehe Bild 50

Diese Bild aus dem Unendlichen kommende Strahlen, dass sie im Brennpunkt treffend. Wir nehmen eine dünne Linse an, deswegen können wir annehmen, sei ein Strich in der Mittellinie.

Warum treffen sich die Strahlen in einem Punkt? Nach dem Fermat'schen Prinzip nimmt das Licht immer den zeitmäßig kürzesten Weg. Da Licht hier mehrere Wege nimmt, bedeutet dies, dass alle Wege zeitmässig gleichlang ist. Dies ist so, weil die Linse in der Mitte dicker ist, deswegen Licht auf dem geraden Weg länger braucht, da Länge im langsamen Medium ist. Wie führen deswegen die **Optische Weglänge** ein.

$$X_{opt} = n \cdot X_{geom} \quad (15.30)$$

Also die Strecke gewichtet, welche Zeit Licht auf dieser braucht. Hier kann man also sagen, dass die optische Weglänge über alle Wege durch die Linse gleich lang ist.

### Brennebene

Siehe Bild 51

Wenn paralleles Licht in einem Winkel  $\alpha$  zur optischen Achse auf die Linse auftritt, treffen sie sich in einem Punkt in der Brennebene. Diese liegt normal auf die optische Achse und geht durch den Brennpunkt. Dies gilt nur für kleine Winkel  $\alpha$  und in paraxaler Näherung.

Dies bedeutet aber, dass jeder Punkt der Brennebene einer bestimmten Einfallsrichtung entspricht. Ein Punkt in der Brennebene ist ein Ort  $X$ , die Einfallsrichtung entspricht dem Impuls  $\vec{p}$  des Lichtes. Dies bedeutet man kann mit einer Linse den Impuls von Licht in einen Ort verwandeln. Dies ist eine Fouriertransformation.

### Abbildung durch Linsen

Siehe Bild 52

Wir haben 3 Hauptstrahlen:

1. Geht parallel zur optischen Achse, wird an der Linse durch den Brennpunkt gebrochen.
2. Geht durch den vorderen Brennpunkt, geht dann parallel zur Optischen Achse weiter.
3. Durch den Mittelpunkt der Linse

Die Vergrößerung ist gleich definiert wie bei dem Spiegel.

Für  $g = b = 2f$  erhalten wir ein gleich grosses Bild:  $V = -1$  mit  $V = \frac{B}{G} = -\frac{b}{g}$ .

Für  $g < 2f$  erhalten wir eine Vergrößerung, und für  $b > 2f$  eine Verkleinerung.

Wenn  $g < f$  wird, erhält man:



Siehe Bild 53

Die Strahlen treffen sich an der Rückseite des Spiegels. Man erhält also ein virtuelles, aufrechtes, vergrößertes Bild. Dies ist der Fall bei einer Lupe. Wenn man außen einen größeren Brechungsindex hat, funktionieren Linsen umgekehrt.

### Zerstreuungslinse

Bei einer Zerstreuungslinse geht der Virtuelle Strahl durch den Brennpunkt.

Siehe Bild 54

Das Bild ist aufrecht virtuell und verkleinert.  $V = -b/g > 0 \Rightarrow$  Aufrecht. Die Brennweite ist bei einer Zerstreuungslinse kleiner als 0.

### Kombination dünner Linsen

Siehe Bild 55

Wir haben als physikalischen Grössern die Brennweiten  $f_1, f_2$  und den Abstand der Linsen  $d$ . Man misst die Brennweite  $f$  von der ersten Linse an, und man nimmt an  $d \ll f$ . Es gilt nun für die Brennweite des Gesamtsystems:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 f_2} \quad (15.31)$$

Für  $d \rightarrow 0$  gilt:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} \quad (15.32)$$

Es kommt anscheinend nicht so sehr auf die Brennweite sondern auf ihren Kehrwert an. Die sogenannte **Brechkraft**

### Brechkraft

Die Brechkraft  $D$  ist gegeben durch:

$$D = 1/f \quad (15.33)$$

Sie wird gemessen in  $m^{-1}$ . Sie wird gemessen in Dioptrie. Man kann also einfach für die obere Formel für die Kombination von Linsen schreiben:

$$D = D_1 + D_2 \quad (15.34)$$

### 15.3.4 Dicke Linsen

Bislang haben wir unsere Linsen immer durch einen Strich idealisiert.

Siehe Bild 56

Wenn man die Strahlen zurückverfolgt, sieht man dass sich die Strahlen nicht in der Mittelebene schneiden. Deswegen führt man sogenannte Hauptebenen ein. Eine ist die, wo sich 2 erdachte Strahlen schneiden. Wenn man dies für die Strahlen von beiden Seiten macht, erhält man die beiden Hauptebenen  $H_1$  und  $H_2$ . Die Bildkonstruktion funktioniert so, dass wir die selben Strahlen verwenden.

Siehe Bild 57

Die Konstruktion funktioniert jetzt so, dass man zwischen den Hauptebenen parallel zur optischen Achse weitergeht.

### 15.3.5 Abbildungsfehler

#### Sphärische Aberration

Aberration kommt aus dem lateinischen und bedeutet Verirrung. Bei Spiegeln hatte wir für Achsen nahe Strahlen einen schönen Brennpunkt. Für Strahlen stärker von der Achse entfernt landen sie außerhalb des Brennpunktes. Wenn man anstelle der Kugelform die Form eines Paraboloids verwendet (jenes das als Tangentenfläche die Kugel hat), dann treffen sich alle Strahlen im Brennpunkt.

Man kann dies analog für Linsen machen.

Siehe Bild 58

Zur Korrektur benötigt man keine Paraboloiden sondern asphärische Linsen. Man bezeichnet die sphärische Aberration auch als Öffnungsfehler von Linsen, da man bei einer kleinen Öffnung noch innerhalb der sphärischen Aberration arbeitet.

#### Chromatische Aberration

Der Brechungsindex ist eine Funktion von der Wellenlänge die sogenannte Dispersion. Also  $n = n(\lambda)$ . Ein blauer Strahl wird einen Brennpunkt näher bei der Linse haben als rotes Licht. Rot hat eine grössere Wellenlänge.

Dies kann man Vermeiden in dem man Spiegel benutzt oder durch die Kombination von Linsen verschiedener Dispersion. Ein solches System nennt man **Achromate**.

#### Astigmatismus

Stigma ist der Punkt. Astigmatismus ist also die Punktlosigkeit. Also ein Punkt wird nicht in einem Punkt abgebildet. Dies kann von einer nicht rotationssymmetrischen Linse kommen also mit 2 verschiedenen Krümmungen für orthogonale Richtungen. Dies kann durch eine Zylinderlinse korrigiert werden. Dies hat nur für Strahlen in einer Richtung eine Brennweite.

#### Astigmatismus schiefer Bündel

Schiefer Strahl dieser bildet keine Ebene mit der optischen Achse.

### 15.3.6 Optische Instrumente

#### Auge

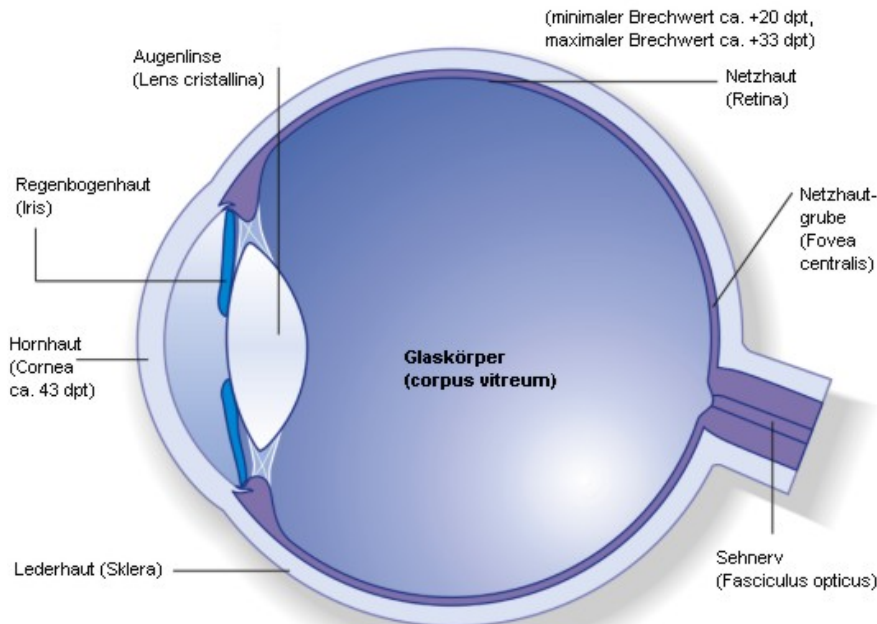


Bild gestohlen von: <http://www.zeiss.de/de/ophtalmic/comp/home.nsf/0/baad5580a9579bb2c12568c00044cfcd?Open>

Durch den Sehnerv haben wir einen blinden Fleck. Dies haben Tintenfische nicht, und haben deswegen keinen blinden Fleck. Das Auge reagiert stärker auf dynamische Bilder als auf statische Bilder.

Der Brechungsindex des Glasgefäßes ist 1.33 und der der Linse 1.40. Dies sind nur Mittelwerte, in Wirklichkeit hat die Linse einen inhomogenen Brechungsindex, der zu einer zusätzlichen Brechung führt (in der Mitte ist die Brechung stärker). Dies ist eine sogenannte **GRIN-Linse** (GRadienten INdex).

Die Sehzellen gruppieren sich in 2 Gruppen.

- Stäbchen: Können nur hell/dunkel unterscheiden aber sie sind lichtempfindlicher.
- Farbsehen, 3-Farben

Das Auflösungsvermögen des Auges ist ungefähr  $\approx 1.5'$  (1.5 Winkelminuten), minimaler Winkelminuten damit man 2 Dinge unterscheiden kann. Dieses ist besser in der Netzhautgrube. Der Mond hat von der Erde aus gesehen, in etwa  $31'$ , das bedeutet wir können am Mond circa 20 Einzelheiten entlang einer Linie erkennen.

Der Mensch hat ein Blickfeld von  $40^\circ - 50^\circ$ .

Siehe auch: <http://www.vobs.at/bio/a-phys/a-auge.htm>

**Räumliches Sehen bzw Stereokopisches Sehen** Mit den beiden Augen sehen wir zwei verschiedene Bilder, damit können wir die Entfernung sehen. Dies geht nur bis zu einer bestimmten Entfernung, danach kann man die Entfernungen nur noch abschätzen.

Unser Auge ist sehr gut an das Spektrum der Sonne angepasst. Dieses hat ein Maximum im Grünen, dort hat das Auge ein Maximum der Wahrnehmungskraft.

### Fehlfunktionen des Auges

Das Auge kann kurzsichtig oder weitsichtig sein.

Das Auge kann sich auf Entfernungen adaptieren, hierzu maximiert das Auge den Anteil der Fourierkomponenten. Dies funktioniert von dem Nahpunkt bis zum Fernpunkt.

	Nahpunkt	Fernpunkt
normal	20 cm	$\infty$
kurzsichtig		$<< \infty$
Anton Zeilinger (10 Dioptrin)	4 cm	7 cm
Weitsichtig	$>> 20\text{cm}$	$\infty$

Bei Kurzsichtigkeit kreuzen sich die Strahlen vor der Netzhaut, dies kann mittels einer Zerstreuungslinse korrigiert werden bzw. mit einer Laseroperation bei der ein Teil der Hornhaut weggeschnitten wird. Bei Weitsichtigkeit ist das Abbild hinter der Netzhaut scharf. Dies kann mit einer Sammellinse korrigiert werden. Es ist vor allem die Altersweitsichtigkeit wichtig.

### Fernrohre

Die einfachste Bauart ist das Fernrohr nach Galilei:

Siehe Bild 59

Man hat zwei Linsen das Objektiv und das Okular. Hierzu verwendet man, dass die Brennpunkte der beiden Linsen zusammenfallen. Parallele Strahlen die aus dem Unendlichen kommen, kommen hinten wieder parallel heraus. Es tritt die gleiche Menge Licht durch das Okular als wie durch das Objektiv, es führt zu einer Erhöhung der Lichtstärke. Die Pupille des Auges hat im Ausgeruhten Zustand einen Durchmesser von 8 mm.

Man hat hierbei ein verkehrtes Bild.

$$\text{Verstärkung der Helligkeit} \propto \frac{D_{obj}^2}{D_{ok}^2} \quad (15.35)$$

Wir überlegen uns jetzt das Bild von 2 Sternen. Man betrachtet die Objekte unter einem grösseren Winkel  $\theta_2$ . Man hat bei dem Fernrohr eine Winkelvergrößerung, das bedeutet man kann Objekte besser trennen:

$$\begin{aligned} \tan \theta_1 &= -\frac{B}{f_1} \\ \tan \theta_2 &= -\frac{B}{-f_2} \end{aligned}$$

Für kleine Winkel gilt:  $\theta_1 \approx \tan \theta_1$ ,  $\theta_2 \approx \tan \theta_2$ . Man erhält also:

$$V = \frac{\theta_2}{\theta_1} = -\frac{f_1}{f_2} \quad (15.36)$$

Dieses Fernroh bezeichnet man als **Astronomisches Fernrohr**. Man möchte jetzt auch aufrechte Bilder haben.

Die erste Lösung ist das **Keplersche Fernrohr** auch **terrestrisches Fernroh** genannt.

Siehe Bild 60

Man nimmt vorne eine Sammellinse und hinten eine Zerstreuungslinse. Dieses Fernrohr produziert ein aufrechtes virtuelles Bild. Für die Vergrößerung gilt dasselbe wie für das von Galilei.

Man kann die Umkehrung auch durch Umkehrprismen erreichen.

Fernrohre, die nur auf Linsen aufbauen nennt man **Refraktor**.

### Reflektor, Spiegelteleskop

Als erstes das Newton'sche Spiegelteleskop mit einem Planspiegel. Hier übernimmt ein Spiegel die Aufgabe des Objektiv. Man hat hier keine chromatische Aberration, und Linsen mit 5 Meter Durchmesser wären nicht mehr handbar.

Siehe Bild 61

Bei dem Cassegrainteleskop hat man ein Loch im Primärspiegel.

Man bezeichnet als **Katadioptrische Systeme** Kombinationen von Spiegeln und Linsen.

Ein Problem ist das Flimmern der Luft (durch Fluktuationen in der Atmosphäre), dies wirkt sich schon aus bei Teleskopen ab 10 cm Durchmesser. Dies kann man lösen durch warten.

Sonst kann man es durch **Adaptiver Optik** lösen. Hierbei verbiegt man den Spiegel, so dass durch die Verzerrung des Spiegels die Störungen der Atmosphäre ausgeglichen werden. Dies macht man in dem man einen hellen Stern möglichst punktförmig macht.

Siehe <http://www.astronomie.de/technik/teleskop-systeme/index.htm>

<http://hubblesite.org/>

[http://twg.na.astro.it/twg\\_homepage.html](http://twg.na.astro.it/twg_homepage.html)

Es gibt Radioteleskope bis runter zu Röntgenteleskope auf Satelliten, da Röntgenstrahlen nicht durch die Atmosphäre gehen. Dort verwendet man die optischen Eigenschaften von Kristallen als optische Instrumente.

### 15.3.7 Mikroskope

Der Zweck ist kleine Dinge zu vergrößern.

Siehe Bild 62

Man will eine Abbildung des Zwischenbild ins Unendliche. Man braucht hierzu ein Objekt, das gerade außerhalb des Brennpunktes des Objektivs liegt.

Man bezeichnet die Vergrößerung des Objektivs:

$$V_{obj} = \frac{B}{G} = -\frac{t}{f_1} \quad (15.37)$$

Mit der Tubuslänge  $t$ . Man nimmt hierzu an, dass das Objekt praktisch im Brennpunkt ist. Die Vergrößerung des Okulars ist eine Winkelvergrößerung.

$$V_{ok} = \frac{s_0}{f_2} \quad (15.38)$$

Mit  $s_0$  dem Nahpunktstand des Auges. Man erhält also für die Gesamtvergrößerung des Mikroskops:

$$V_{Mikroskop} = -\frac{t}{f_1} \cdot \frac{s_0}{f_2} \quad (15.39)$$

Es gibt sehr viele verschiedene Mikroskope, diese unterscheiden sich im Wesentlichen durch die Beleuchtung.

### Elektronenmikroskope

Diese baut man wie Lichtmikroskope bis darauf, dass man elektrische bzw. magnetische Linsen verwendet. Hiermit erreicht man höhere Auflösungen, da Elektronen eine kleinere Wellenlänge haben. Diese erhält man mittels der de Broglie Beziehung:

$$\lambda = \frac{h}{mv} \quad (15.40)$$

Mit  $h$  das Planckschewirkungsquantum,  $v$  die Geschwindigkeit und  $m$  die Masse. Handhabare Elektronen haben Wellenlängen in der Größenordnung von  $10^{-12}m$

### Rastertunnelmikroskop

Dieses beruht auf dem Tunneleffekt und wurde von Binnig und Rohrer erfunden. Sie erhielten hierfür den Nobelpreis. Der Tunneleffekt ist in unserem Fall, dass von der Metalloberfläche zur Spitze klassisch kein Strom fließen dürfte, da Vakuum ein Isolator ist.

Siehe Bild 63

Der Strom  $I$  nimmt mit Abstand  $x$  exponentiell ab. Dies ist ein rein quantenmechanischer Effekt. Eine Metalloberfläche ist nicht wirklich eben, sondern es sitzt ein Atom neben einem anderen. Wenn jetzt die Spitze in der Nähe eines Atom ist, fließt mehr Strom. Wenn man das über die gesamte Oberfläche macht, erhält man ein Abbild der Oberfläche.

In Wirklichkeit führt man dies durch in dem man die Spitze bewegt und den Strom konstant hält. Man bezeichnet diese als **STM**: Scanning Tunnel Mikroskop.

## 15.4 Wellenoptik

Thomas Young im Jahr 1802 zeigte mit dem Doppelspalt Experiment, dass Licht eine Welle ist.

Siehe Bild 64

Man hat zwei Kugelwellen dahinter. Diese überlagern sich, es geschieht Superposition. Man erhält dann dahinter Maxima und Minima, manchmal verstärken sich die Wellen oder löschen sich aus. Bei einem Spalt sieht man einen homogenen Lichtfleck, beim Doppelspalt sieht man dunkle Spalten in diesem Fleck. Wir wollen nun verstehen.

Siehe Bild 65

Wir betrachten zwei parallele Strahlen aus jedem Spalt. Um sich zu überlegen, wie die Interferenz ist, müssen wir uns den Gangunterschied  $\Delta x$  zwischen den beiden Strahlen ausrechnen. Wenn diese gleich ist  $\Delta x = n \cdot \lambda$  mit  $n$  einer ganzen Zahl erhält man ein Maximum sogenannte konstruktive Interferenz. Wenn  $\Delta x = (2n + 1) \cdot \lambda/2$  hat man destruktive Interferenz also ein Minimum (Auslöschung der Wellen). Mit einem Spaltabstand  $D$ .

$$\begin{aligned}\sin \alpha &= \frac{\Delta x}{D} \\ \Delta x &= D \cdot \sin \alpha\end{aligned}$$

Also erhalten wir Maxima, bei einem  $\alpha$  für das gilt:

$$\sin \alpha = n \frac{\lambda}{D} \quad (15.41)$$

Und Minima für:

$$\sin \alpha = \frac{2n + 1}{2} \frac{\lambda}{D} \quad (15.42)$$

Also sind die Minima genau zwischen den Maximas, es kommt auf das Verhältnis zwischen Wellenlänge und Spaltabstand  $D$  an.

Man kann auch Fullerene  $C^{60}$ ,  $C^{72}$  beugen. Dies sind Fußballmoleküle. Diese haben eine sehr grosse Masse. Dies führt zu einer Wellenlänge von  $\lambda = 3pm = 3 \times 10^{-12}m$ . Zur Beugung dieser Moleküle sind Spaltabstände  $D$  von  $5 \cdot 10^{-5}m$ . Man erhält:

$$\frac{\lambda}{D} = \frac{3 \cdot 10^{-12}}{5 \cdot 10^{-5}} = 6 \cdot 10^{-6}$$

Diese Beugung tritt also unter sehr kleinen Winkel auf.

Je grösser die Wellenlänge desto so grösser ist der Abstand zwischen den Maxima.

**Beleuchtungsbedingungen**

Wir haben angenommen, dass wir Ebene Wellen, also dass die Punktquellen in Phase sind. (gleichphasig), außerdem haben wir angenommen, dass wir monochromatisches Licht haben. Also nur eine Wellenlänge.

**Schräge Beleuchtung**

Siehe Bild 66

Dies bedeutet, dass die Wellen nicht in Phase sind, man hat einen Phasenunterschied  $\delta$ . Verschiebung um  $\theta_0$  des Zentralenmaximums.

**Nicht monochromatisches Licht**

Siehe Bild 67

Wir bezeichnen mit  $n$  die Ordnung eines Maximas. Es werden die Maximas höherer Ordnung verwaschen. Wenn wir eine Wellenlängen Differenz von  $\Delta\lambda$  haben. Sind  $n \leq \lambda/\Delta\lambda$  sichtbar. Das Maximum  $n = 0$  tritt immer auf. Dieses nennt man **Weißlichtinterferenz**.

**Kohärenz**

Es gibt zwei Extreme:

- Voll kohärent: Es treten Beugungsordnung beliebiger Ordnung auf.
- Voll inkohärent: Es gibt keine Interferenz

**15.4.1 Einzelspalt**

Wir haben einen einzelnen Spalt mit endlicher Spaltbreite  $d$ .

Siehe Bild 68

Wir haben wieder ebene Wellen. Jeder Punkt im Spalt ist Ausgangspunkt einer Kugelwelle. Wir haben experimentell gesehen, dass unter bestimmten Winkeln keine Intensität auftritt. Das Phänomen, das Licht ums Eck geht nennen wir **Beugung**. Aus Symmetriegründen haben Punkte, die genau die halbe Spaltbreite von einander entfernt sind, die gleiche Lage zueinander. Wenn deren Verschiebung genau  $\lambda/2$  ist, werden sich diese Wellen auslöschen.

Dies bedeutet es gibt Minimas für:

$$\sin \theta = \frac{\lambda/2}{d/2} = \frac{\lambda}{d} \quad (15.43)$$

Es tritt bei erneuter Halbierung genauso auf, mit  $n \neq 0$ :

$$\sin \theta_{\text{minimum}} = n \frac{\lambda}{d} \quad (15.44)$$

Bei  $n = 0$  addieren sich alle Wellen. Die neben Maxima sind sehr schwach. Der Peak in der Mitte ist doppelt so hoch wie die anderen.

Die Halbwertshöhe genannt FWHM (Full Width at Half Maximum):

$$FWHM = 0.89 \frac{\lambda}{d} \approx \frac{\lambda}{d} \quad (15.45)$$

Beim Durchtritt einer Welle durch eine Öffnung kommt es immer zu einer Aufweitung. Diese nennen wir **Beugung**. Dies ist bei jeder Welle so. Dies bestimmt das Auflösungsvermögen optischer Instrumente.

$$\Delta\theta \approx \frac{\lambda}{d} \quad (15.46)$$

### Auflösungsvermögen

Überlegung von Rayleigh. Wenn ich mit einem Instrument zwei Punkte betrachte erhalte ich zwei Beugungsscheibchen. Wenn diese nah beieinander liegen, kann ich sie nicht mehr unterscheiden.

Bild 69

$$\Delta\theta_{krit} = 1,22 \cdot \frac{\lambda}{d} \quad (15.47)$$

Dies ist die Beugungsbegrenzung eines jeden optischen Instrumentes. Die Beugungsbegrenzte Optik ist der Idealfall. Gute optische Instrumente sind durch einen Faktor 2 oder 3 schlechter. Das Rayleighkriterium ist definiert dadurch, dass das Maximum einer Wellenlänge mit dem ersten Minimum der zweiten zusammenfällt.

### Intensitätsverteilung

Bild 70

Man unterteilt den Einzelspalt in  $N$  kleine Teile. Man überlegt sich den Phasenunterschied zwischen zwei *Wavelets* (Wellenstückchen). Für  $a = dN^{-1}$  erhält man den Phasenunterschied:  $\delta = 2\pi\lambda^{-1}a \sin\theta$ . Man überlegt sich das ganze als Komplexe Welle:  $A = A_0 e^{i(kx - \omega t)}$ . Üblich ist:  $k = 2\pi\lambda^{-1}$  und  $\omega = 2\pi\nu$ . Man kann nun schreiben:  $A = A_0(\cos(kx - \omega t) + i \sin(kx - \omega t))$ . Man hat einen Realteil und einen Imaginärteil, nur der Realteil ist physikalisch. Dieser entspricht der Elektrischen Feldstärke:  $E = \Re(A) = A_0 \cos(kx - \omega t)$ . Man kann nun in der komplexen Zahlenebene arbeiten. Bei  $\theta = 0 \Rightarrow \delta = 0$  addieren sich alle Vektoren auf. Diese sind kohärent in Phase:  $A_{max} = N \cdot A_0$ . Für eine beliebige Richtung:  $\theta \neq 0, \delta \neq 0$ . Die Vektoren formen einen Kreis, je grösser der Winkel  $\delta$  wird die Krümmung stärker. Das erste Minimum erhält man, wenn  $A(\theta) = 0$ . Korrektur: physikalisch ist das Betragsquadrat bedeutend.

Die Intensitätsverteilung ist gegeben durch:

$$I = I_0 \text{sinc}^2 x \quad (15.48)$$

$$\text{sinc} x = \frac{\sin x}{x} \quad (15.49)$$

$$x = \frac{\pi}{2} \cdot d \sin \theta \quad (15.50)$$

### Doppelspalt

Mit endlicher Spaltbreite.

$$I = 4I_0 \text{sinc}^2 x \cdot \cos^2 \frac{\delta}{2} \quad (15.51)$$

Der  $\text{sinc}^2 x$ -Anteil stammt vom Einzelspalt.  $\cos^2 \delta/2$ . Das Einzelspaltbild ist die einhüllende vom Doppelspalt. Mit  $I_0$  die Intensität eines einzelnen Spaltes. Mit zwei Spalten verdopple ich die Amplitude, also vervierfache ich die Intensität. Deswegen sagt man bei Superposition nicht  $1+1=2$  sondern  $1+1=4$ .

Siehe bild 71

Mit  $d$  Spaltbreite und  $D$  Abstand der Spalte.

### Quantenphysikalisch

Bislang haben wir angenommen es handelt sich um Wellen, jetzt machen wir das ganze mit einzelnen Quanten. Wir erhalten wieder unser Doppelspaltbild. Jedes einzelne Teilchen tritt irgendwo auf. Man versteht indem man die klassische Welle als Wahrscheinlichkeitsverteilung dafür, dass es irgendwo auftritt.

Die Frage ist nun woher weiss das Teilchen das?



### Kopenhagener Interpretation

Diese geht davon aus, dass die Welle mit der wir klassisch rechnen, nichts ist als eine Wahrscheinlichkeit. Sie ist also eine **Wahrscheinlichkeitswelle**, die aussagt mit welcher Wahrscheinlichkeit ein Teilchen da zu finden, wenn ich es messe.

Es ist keine Interferenz mehr da, wenn man den Weg bestimmen könnte. Dies bedeutet nicht, dass es es tut. Das Verschwinden der Interferenz passiert kontinuierlich.

**Komplementarität** Genaue Kenntnis einer Grösse impliziert die Unkenntnis einer anderen. Die Unschärferelation ist eine Konsequenz davon. Es gibt zu jeder physikalischen Grösse mindest eine Komplementäre.

Man könnte das ganze auch so umformulieren, dass ein System nur beschränkt viel Information tragen kann.

### 15.4.2 Beugung am Gitter

Dies sind  $n > 2$  Spalte. Wir überlegen uns den Fall  $n = 3$ .

Siehe Bild 72

Dies wird bis zur Auslöschung weit gehen...

Beim Doppelspalt hatten wir nur ein Minimum.

Bei  $n$  Spalten addiert man  $n$  solche kleinen Vektoren. Man hat  $n-1$  Minimas,  $n-2$  Nebenmaximas, deren Intensität ist in der Größenordnung  $n^{-2}$  Also  $IO(1/n^2)$ . Diese werden also immer schwächer. Die Breite des Hauptmaximums ist proportional zu  $1/n$ .

Die Beugung am Gitter kann man verwenden, um Farben von einander zu trennen. Es gilt für die Hauptmaxima das Gleiche wie für den Doppelspalt:

$$\sin \theta_{Max} = n \frac{\lambda}{d} \quad (15.52)$$

Hiermit kann man einen **Gitterspektrographen** bauen. Dies ist die einzige Methode, um eine optische Wellenlänge mit der Definition des Meters in Verbindung zu bringen. Das Auflösungsvermögen ist proportional zu  $1/n$ .

### Transmissionsgitter

Hier gilt für die Hauptmaxima:

$$\sin \theta_{Max} = n \frac{\lambda}{d} \quad (15.53)$$

$d$  ist hier die Gitterkonstante der Abstand der Gitterstreifen.  $n$  nennt man die Beugungsordnung. Wir hatten hier ein Absorptionsgitter. Aber es gibt auch Phasengitter.

Siehe Bild 73

Hier bei bewirkt die Dicke  $1/2D_\lambda$  eine Phasenverschiebung um  $\lambda$ .

### Reflektionsgitter

Siehe Bild 74

### 15.4.3 Interferenz Dünner Schichten

Siehe Bild 75

Wir haben eine dünne Schicht Glas, und nehmen an wir haben senkrechten Einfall (nicht so gezeichnet). Bei senkrechtem Einfall ist die Reflektivität gleich:

$$R = \frac{I_{\text{Reflektiert}}}{I_0} = \left( \frac{n-1}{n+1} \right)^2 \quad (15.54)$$

Man könnte glauben, dass die Maximas treten auf bei  $2d = m \cdot D_\lambda$ . Dies ist falsch, weil sonst bei  $D_\lambda$  ein Maxima auftreten würde. Richtig ist:

$$2d = \left(m + \frac{1}{2}\right) D_\lambda \quad (15.55)$$

Da es bei der Reflexion um einen Phasensprung, um  $\lambda/2$  bzw  $\pi$  kommt. Wobei  $m$  eine beliebige ganze Zahl ist. Hiermit kann man entspiegeltes Glas erzeugen. Dies geschieht in dem man eine Schicht, aufbringt, dass man eine dünne Schicht aufträgt, so dass sich die interferierenden Wellen auslöschen. Es muss hierfür gelten:  $n_0/n_1 = n_1$

So werden die **Newton'schen Ringe** erzeugt.

# Kapitel 16

## Vektoranalysis

Genauere Informationen zur Vektoranalysis und generellen mathematischen Methoden gibt es hier<sup>1</sup>. Man darf sich auf keinen Fall auf diesen Teil verlassen, weil ich ihn mir zusammen gedichtet habe.

### 16.1 Vektoren

Es gibt radiale (polare) und axiale Vektoren. Polare Vektoren bleiben bei Veränderung der Basis gleich. Axiale Vektoren verändern sich. Einer der beiden Vektoren, die in einem Kreuzprodukt in eine Formel einfließt, ist ein axialer Vektor. Zum Beispiel das Magnetfeld  $\vec{B}$  bei der Kraft auf eine Ladung in einem Magnetfeld:  $\vec{F} = q(\vec{v} \times \vec{B})$ .  $\vec{F}$  und  $\vec{v}$  sind hier polare Vektoren, da sie erhalten bleiben müssen.

Die physikalische Realität muss unter Transformationen erhalten werden. Deswegen sind die axialen Vektoren nicht „messbar“, wie die Winkelgeschwindigkeit oder das Magnetfeld.

### 16.2 Gradient

$\phi$  ist ein Skalar und Gradient  $\phi$  ein Vektor.

$$\phi = \phi(x, y, z) \quad (16.1)$$

$$\text{grad}(\phi) = \nabla\phi = \begin{pmatrix} \partial\phi/\partial x \\ \partial\phi/\partial y \\ \partial\phi/\partial z \end{pmatrix} \quad (16.2)$$

Mit dem Gradienten wird aus einer Funktion, die jedem Punkt im Raum einen Skalar zuordnet, ein Vektor gemacht. Dieser zeigt in die Richtung der grössten Steigung.

Als konkretes Beispiel dient das Potential und die Kraft. Die Kraft wirkt so, dass das Potential sich am schnellsten verringert. Also wirkt diese entgegengesetzt der grössten Steigung, also:  $\vec{F} = -\nabla U$

#### 16.2.1 In Kugelkoordinaten

In Kugelkoordinaten erhält man:

$$\text{grad}\phi = \begin{pmatrix} \partial\phi/\partial R \\ 1/R \partial\phi/\partial\vartheta \\ 1/(R \sin\vartheta) \partial\phi/\partial\varphi \end{pmatrix} \quad (16.3)$$

---

<sup>1</sup><http://www.harendt.de/plasma/math/index.htm>

## 16.3 Divergenz

Die Divergenz macht aus einem Vektor einen Skalar.

$$\operatorname{div}(\vec{E}) = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \quad (16.4)$$

Hier ist der Vektor  $\vec{E}$  von dem Ort abhängig. Die Divergenz ordnet diesem Vektor einen Skalar zu, der angibt wie stark sich das Feld an dieser Stelle ändert.

### 16.3.1 Divergenz eines Produktes mit einem Skalar

$$\operatorname{div}(\lambda \cdot \vec{v}) = \lambda \cdot \operatorname{div} \vec{v} + \vec{v} \cdot \operatorname{grad} \lambda \quad (16.5)$$

## 16.4 Rotation

Die Rotation verwenden wir, um die Wirbelhaftigkeit eines Volumens zu beschreiben, also eine Zirkulation. Die Divergenz verwenden wir, um den Austritt zu beschreiben.

Diese werden, wir durch den Wirbel pro Fläche beschreiben.

Im Gegensatz zur Divergenz (die einen Skalar ergibt), ergibt die Rotation einen Vektor.

$$\operatorname{rot} \vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \end{pmatrix} \quad (16.6)$$

Die Rotation beschreibt die Wirbelstärke. Dies heisst Zirkulation pro Flächeneinheit.

## 16.5 Laplace Operator

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad}(\phi)) = \Delta \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \quad (16.7)$$

Der Laplace Operator ist die Kombination des Gradienten und der Divergenz. Wenn man ihn auf eine Potential anwendet, erhält man durch ihn wie stark sich dieses an der Stelle ändert. Dies ist leicht ein zu sehen, da man ja die zweite Ableitung hat, und diese immer für eine Änderung steht.

## 16.6 Satz von Gauss

V ist ein Volumen.  $\vec{E}$  ist ein Vektorfeld.  $\vec{f}$  die Flächenvektoren auf das Volumen.

$$\oint_{\operatorname{Rand}(V)} \underbrace{\vec{E}}_{\text{Vektor}} \cdot d\vec{f} = \iiint_V \underbrace{\operatorname{div} \vec{E}}_{\text{Skalar}} \cdot dv \quad (16.8)$$

Mit dem Satz von Gauss kann man manche Formeln vereinfachen. Dies ist laut Paul Wagner, ein mathematischer Satz, und braucht deswegen von einem Physiker nicht näher verstanden zu werden.

## 16.7 Stoke'scher Integralsatz

Dieser geht analog zum Satz von Gauss.

$$\oint_{\operatorname{Rd}(A)} \vec{B} \cdot d\vec{r} = \iint_A \operatorname{rot} \vec{V} \cdot d\vec{f} \quad (16.9)$$

„Den Beweis ich Ihnen natürlich nicht. *Das ist Mathematik.*“ - Paul Wagner

Wir betrachten dies für eine kleine Fläche  $\Delta A$ :

$\Delta \vec{A}$  ist der Flächenvektor der Fläche.

$$\underbrace{\oint_{Rd(\Delta A)} \vec{B} \cdot d\vec{r}}_{\text{Zirkulation von } \vec{B} \text{ um } \Delta A \text{ herum}} \approx \underbrace{(\text{rot} \vec{B}) \cdot \Delta \vec{A}}_{|\text{rot} \vec{B}| \cdot |\Delta A|}$$

$$|\text{rot} \vec{B}| = \frac{1}{|\Delta A|} \cdot \oint_{Rd(\Delta A)} \vec{B} \cdot d\vec{r}$$

## 16.8 Formeln

$$\text{rot grad} \lambda = 0 \quad (16.10)$$

$$\text{div rot} \vec{v} = 0 \quad (16.11)$$

$$\text{rot}(\text{rot} \vec{A}) = \text{grad}(\text{div} \vec{A}) - \Delta \vec{A} \quad (16.12)$$